橢圓函數論綱要

H. И. 阿希澤爾著
劉書琴 紀 琁譯
趙 根 榕 校

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1948年出版的阿希澤爾（Н. И. Ахиезер）著"橢圓函數論綱要"（Элементы теории эллиптических функций）譯出的。原書係蘇聯工程師物理數學叢書之一，可供工程師作爲參考書之用。

本書由西北大學數學系劉書琴、紀旋合譯，趙根榕校訂。

橢圓函數論綱要

劉書琴　紀　旋譯

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）

新華書店總經售

商務印書館上海廠印刷

上海天通菴路一九〇號

(54611)

開本850×1168 1/32　印張8　字數193,000

1956年2月初版　印數1—2,000

1956年2月上海第1次印刷　定價(8) ¥1.21

目 錄

序

橢圓函數論是相當簡單的數學科目。學者無需習慣於抽象的數學研究就能夠了解它。而且如果把某些特殊的理論問題放到一邊不管的話，就無需具有許多數學的預備知識。尤其是，本書是這樣編寫的，凡是知道數學分析以及複變函數論基本原理的人，在讀它的主要幾章時就不感到困難。而數學分析與複變函數論的知識是物理數學系與某些高等工業學校的學生讀滿三年就已具備了的；這些知識也是那些在自己工作中必須利用數學的工程師們所具備的。本書也就是以這些方面的讀者為目標而編的。

本書雖然收在"工程師物理數學叢書"中，當然並不是說，橢圓函數論的知識是每個工程師所必需的。但橢圓函數論的知識對許多工程師是非常有用的。只要提到橢圓濾序器的近代計算法即足以說明這一點。這些計算法以 П. Л. 契貝雪夫(Чебышев)和 Е. И. 棗勞塔廖夫 (Золотарёв) 的卓越研究的精細結果為基礎，而這些研究是關於連續函數利用有理分式的最佳接近法。但要了解這些研究，橢圓函數變換的理論是必需的。

本書的某幾章節可能是困難的。只對應用感興趣而且只想稍微認識一下理論，以便學會利用公式表的人可只研究前六章，而且第二章與 §§ 29, 30 只翻閱一下就夠了。

本書附有公式表。 我建議讀基本課文時，請順便但留心地認識一下這些表，在課本中未證明的那些公式，請自行驗證。這是有益的練習，從另一方面看，也可使以後應用這些表時要容易些，因為這樣讀者將來會很好地知道，要找什麼，到哪兒去找。

除表而外，本書另外還有一個附錄——解析函數論摘要。這是專爲那些在研究橢圓函數之前需要重温一般複變函數論的讀者而寫的。

最後我特向 В. К. 巴爾達格(Балтаг)致以眞誠的謝忱，他校讀了全部手稿並作了若干修正。

Н. И. 阿希澤爾

第一章　橢圓函數的一般定理

1．單值解析函數的週期　今後如果沒有相反的預先聲明，我們所指的函數是單值解析函數，它的奇異點在有限距離內沒有極限點。若 $f(u)$ 是這樣的一個函數，且在它的每一正則點 v 處有下列等式成立：

$$f(v+2\omega)=f(v),$$

這裏邊 2ω 是常數，則函數 $f(u)$ 叫做**週期函數**，而 2ω 叫做它的**週期**。

若　　　　$2\omega_1,\ 2\omega_2,\ \cdots,\ 2\omega_n$

全是函數 $f(u)$ 的週期，則對於任意的整數 $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$，數

$$2m_1\omega_1+2m_2\omega_2+\cdots+2m_n\omega_n,$$

容易看出來也是它的週期。

若 $f(u)$，$g(u)$ 均有週期 2ω，則下列各函數的週期也是 2ω：

$$f(u+C),\ f(u)\pm g(u),\ f(u)\cdot g(u),\ \frac{f(u)}{g(u)},\ f'(u)。$$

我們把最後的一個論斷，作爲例子來證明一下。爲此，取函數

$$\frac{f(u+h)-f(u)}{h},$$

則由前邊的論斷知此函數具有週期 2ω。故在它的每一正則點 v 處有下列等式成立：

$$\frac{f(v+2\omega+h)-f(v+2\omega)}{h}=\frac{f(v+h)-f(v)}{h}。$$

現今祇要取當 $h\to 0$ 時的極限就夠了。

我們將證明：不是常數的函數不能有無窮小的週期，換句話

說,就是將證明:對於每一個不是常數的函數 $f(u)$ 有這樣的 $\mu>0$ 存在,使函數 $f(u)$ 的任一週期(除去無足輕重的等於零的週期)適合於不等式:

$$|2\omega|\geqslant\mu。$$

假設這命題不成立。設 $f(u)$ 有不是零的週期:

$$2\omega_1,\ 2\omega_2,\ \cdots,\ 2\omega_n,\ \cdots$$

且
$$\lim_{n\to\infty}2\omega_n=0。$$

因爲對於函數 f 的任一正則點 u,

$$f(u+2\omega_n)-f(u)=0,$$

所以
$$\frac{f(u+2\omega_n)-f(u)}{2\omega_n}=0,$$

故在函數 f 的任一正則點 u 有

$$f'(u)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(u+2\omega_n)-f(u)}{2\omega_n}=0,$$

這是不可能的,因 $f(u)$ 不是常數。

$$e^{\frac{\pi iu}{\omega}}$$

是以 2ω 作週期的最簡單函數的例子。這函數的每一個週期都是 $2m\omega$ 的形狀,這裏邊 m 是整數。這樣,在所論情形,有一原始週期存在,卽 2ω。另外的每一個週期都是週期 2ω 的整數倍。所以所考察的函數可以叫做單週期函數。

今有一問題發生:是否有原始週期的數目 n 大於 1 的函數存在呢?若每一個週期都是這 n 個週期的一次結合,其係數都是整數,而且並不是每一週期都能用少於 n 個固定週期的這樣的一次結合表示時,則我們叫這 n 個週期爲原始週期。

這個問題的答案是:具有 $n\geqslant3$ 個原始週期的函數不存在;至於具有兩個原始週期的函數,它祇能在這兩個週期的比不是實數時,才能存在。第二判定($n=2$)的否定部份與第一判定($n\geqslant3$)構

成雅各比(Jacobi)的一個定理的內容。

2. 雅各比定理的證明　我們將用複數平面上的點表示已知函數 $f(u)$ 的週期。這時複數平面上任意有限部份內週期點的個數祇是有限個，因爲，否則它們將有有限極限點，因之有週期的序列$\{2\omega_n\}$存在，此序列具有有限極限，這就是說，$f(u)$ 具有無窮小的週期

$$2(\omega_n-\omega_m)\quad(m,\ n\to\infty),$$

這是不可能的，因假定 $f(u)$ 不是常數。

我們將取任意的不是零的週期 2ω 且考察週期 $2m\omega$ $(m=\pm1, \pm2, \cdots)$；這些週期點全在某一直線 Z 上。自然有二種情形發生：(1)函數 $f(u)$ 的週期全在直線 Z 上；(2)函數 $f(u)$ 的週期不全在直線 Z 上。

今先研究第一種情形。因爲在直線 Z 上由點 -2ω 至 $+2\omega$ 的線段上，根據上面的證明，祇有有限個週期點，故可求出模數爲最小的一個週期，我們依舊取 2ω 是這樣一個週期這並不破壞普遍性。因爲週期全在直線 Z 上，故全可用 $2t\omega$ 的形狀表示出來，這裏邊 t 是實數；同時 t 滿足不等式 $|t|\geqslant1$，因爲根據條件，2ω 是具有最小模數的一個週期。我們將證明 t 祇能取整數。由此推出 2ω 是原始週期，且 $f(u)$ 是單週期函數。

命
$$t=m+r,$$
這裏邊 m 是整數且 $0\leqslant r<1$。因爲除了 $2t\omega$ 以外還有 $2m\omega$ 也是 $f(u)$ 的週期，故

$$2r\omega=2t\omega-2m\omega$$

也是一個週期，但當 $0<r<1$ 時，根據我們的規定，這是不可能的。故 $r=0$，即 t 是整數。

再轉移到第二情形。設 $f(u)$ 的週期不全在直線 Z 上，用 $2\omega'$ 表示不在 Z 上的週期之一，且研究以 0、2ω、$2\omega'$ 作頂點的三角形。

在這一個三角形的邊上及內部我們已證明了祇可能具有有限個週期點。由三角形內部(或邊上)取任一個週期點以代替我們三角形的頂點之一,就得出類似的一個三角形在它的內部有較少數目的週期點。這樣繼續下去,我們一定可得到一個三角形,如果不算它的頂點,則在它的內部及邊上沒有週期點。我們可不失去任何普遍性而取原先以 0、2ω、$2\omega'$ 作頂點的三角形為這樣一個"空"的三角形。今作一平行四邊形,命其頂點為 0、2ω, $2\omega+2\omega'$、$2\omega'$ (圖 1)。則前邊所研究的以 0、2ω、$2\omega'$ 作頂點的空三角形為平行四邊形"左邊的"一半。我們可肯定平行四邊形"右邊的"一半也是空的三角形,卽如果我們不算頂點時在這一三角形內部和邊上全沒有週期點。事實上,若平行四邊形右邊的一半有一個週期點 $2\tilde{\omega}_1$,則左邊的一半有一個週期點 $2\omega+2\omega'-2\tilde{\omega}_1=2\tilde{\omega}_2$,但由作圖時的規定,左邊的一半是空的。故所作的平行四邊形是空的。今取我們函數的任一週期 $2\omega^*$。則 $2\omega^*$ 能,且祇能用一種方法將它表成以下形式:

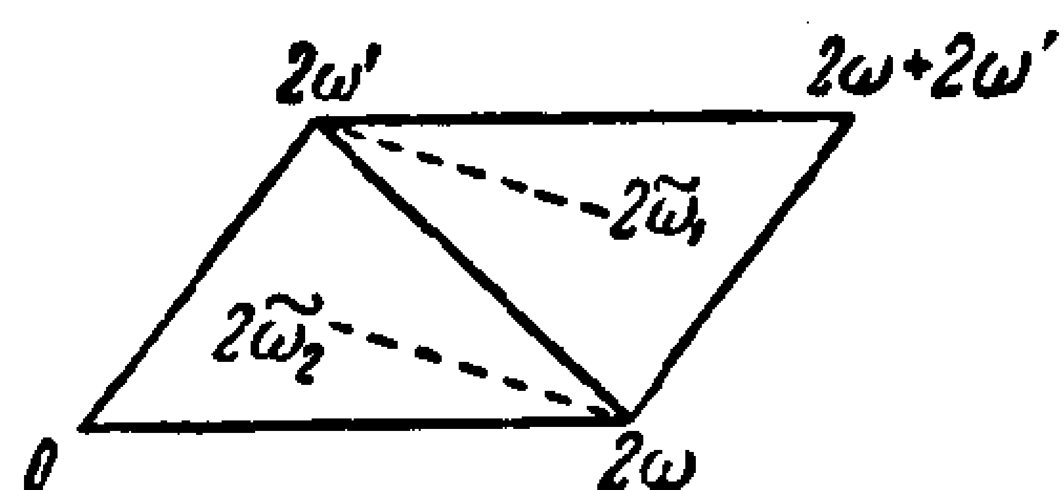


圖 1.

$$2\omega^*=2t\omega+2t'\omega',$$

其中 t、t' 全是實數。這種表示等於將向量 $2\omega^*$ 沿着向量 2ω 及 $2\omega'$ 分解。

若我們能證明 t、t' 是整數,則可斷定當我們這兩種情形的第二種情形實現時原始週期的個數為二,而其比不為實數。這樣,雅各比定理就完全證明了。

這樣,命

$$t=m+r, \quad t'=m'+r',$$

這裏邊 m、m' 是整數,且 $0\leqslant r<1$, $0\leqslant r'<1$,我們應該證明 $r=r'=0$。

因 $2m\omega$、$2m'\omega'$ 是函數 $f(u)$的週期，故下邊的數也是週期：

$$2\omega_1^* = 2\omega^* - 2m\omega - 2m'\omega' = 2r\omega + 2r'\omega'。$$

週期點 $2\omega_1^*$ 在我們所作的以 0、2ω、$2\omega+2\omega'$、$2\omega'$ 爲頂點的平行四邊形內，更因這一平行四邊形是空的，故應與這一平行四邊形的頂點之一重合。因此數 r、r' 應各等於零或 1 。由不等式

$$0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant r' < 1,$$

故得

$$r = 0, \quad r' = 0,$$

這就是所要證明的。

3. 西他函數　三角級數是週期函數的很好的例子。這裏我們研究用以界說西他函數的三角級數。我們取

$$\vartheta_3(v) = \vartheta_3(v \mid \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau + 2mv)\pi i}。 \tag{1}$$

作爲基本的西他函數。這裏邊 v 是自變數，而 τ 是參數，它的虛數部份是正的：

$$\Im\tau > 0。$$

在這條件下，量

$$h = e^{\pi i \tau}$$

的絕對值小於 1，這使得被研究的級數對於任意的有限的 v 絕對收斂。

不難將 $\vartheta_3(v)$ 改寫成形式：

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2h\cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi v + \cdots。$$

這樣，$\vartheta_3(v)$ 是 v 的偶超越整函數，它的週期是 1 。

由(1)，

$$\vartheta_3(v+\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau + 2mv + 2m\tau)\pi i} =$$

$$= e^{-\pi i(\tau + 2v)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{[(m+1)^2\tau + 2(m+1)v]\pi i} =$$

$$= e^{-\pi i(\tau + 2v)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n^2\tau + 2nv)\pi i}。$$

所以我們看出來

(2) $$\vartheta_3(v+\tau)=e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_3(v)。$$

把(2)的兩邊取對數，然後在兩邊求關於 v 的二級導數，則得出等式

$$\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v+\tau)=\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v)。$$

因爲另外還有，

$$\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v+1)=\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v),$$

故
$$\varphi(v)=\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v)$$

是用 1、τ 作週期的函數的一例，且 1、τ 的比不是實數；這是一個**雙週期**函數。應注意，$\varphi(v)$ 是有理型函數；這是由於 $\vartheta_3(v)$ 爲整函數而得出的[①]。

除去 $\vartheta_3(v)$ 外，我們再導入三個西他函數

$$\vartheta_0(v)=\vartheta_0(v\,|\,\tau),$$
$$\vartheta_1(v)=\vartheta_1(v\,|\,\tau),$$
$$\vartheta_2(v)=\vartheta_2(v\,|\,\tau)。$$

它們可用下邊的等式界說之，

$$\vartheta_0(v)=\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right),$$

$$\vartheta_1(v)=ie^{-\pi i\left(v-\frac{1}{4}\tau\right)}\vartheta_3\left(v+\frac{1-\tau}{2}\right),$$

$$\vartheta_2(v)=e^{-\pi i\left(v-\frac{1}{4}\tau\right)}\vartheta_3\left(v-\frac{\tau}{2}\right)。$$

由上邊的定義，我們不難得出所有西他函數的福利哀級數的展開，

---

① 因 $\vartheta_3(v)$ 是整函數，故它的對數的導數

$$\frac{d}{dv}\ln\vartheta_3(v)$$

僅有的奇異點是一級的極點，此等極點是函數 $\vartheta_3(v)$ 的零點。故函數 $\varphi(v)$ 僅有的奇異點是二級的極點。

也不難導出與三角學中大家都知道的公式相類似的簡化公式，這些公式完全包含在第 VIII 表內(附錄 I)。

今再提出下面的事實以結束本節，比

$$\varphi_1(v)=\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},\quad \varphi_2(v)=\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\quad \varphi_3(v)=\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},$$

由第 VIII 表中所列的公式可知，滿足下面的等式:

$$\varphi_1(v+1)=-\varphi_1(v),\quad \varphi_1(v+\tau)=\varphi_1(v),$$
$$\varphi_2(v+1)=-\varphi_2(v),\quad \varphi_2(v+\tau)=-\varphi_2(v),$$
$$\varphi_3(v+1)=\varphi_3(v),\quad \varphi_3(v+\tau)=-\varphi_3(v)。$$

故函數 $\varphi_1(v)$ 具有週期 2、τ，函數 $\varphi_2(v)$ 具有週期 2、$1+\tau$，最後，函數 $\varphi_3(v)$ 具有週期 1、2τ。函數 $\varphi_k(v)$ 的每一個均為有理型函數。這樣我們得出有理型雙週期函數存在的第二個證明。

有理型雙週期函數叫做**橢圓函數**。這術語的起源將在後邊解釋。

4. 留衞路定理　我們將研究具原始週期 2ω、$2\omega'$ 的橢圓函數，且如果沒有相反的預先說明，即認為比 $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$ 的虛數部份為正數。取複數平面上的某一點 c 且以 c、$c+2\omega$、$c+2\omega+2\omega'$、$c++2\omega'$ 為頂點[①]作一平行四邊形。由平行四邊形的四個頂點祇留下頂點 c，其餘三頂點全除去，而其四邊則祇留下相交於 c 之二邊。這樣決定的點集合叫做基本平行四邊形或週期平行四邊形。若

$$u''-u'=2m\omega+2m'\omega',$$

其中 m、m' 是整數，則我們叫 u'、u'' 關於週期 2ω、$2\omega'$ 為等餘的或等價的，並寫為

$$u''\equiv u'\ (\mathrm{mod}\ 2\omega,\ 2\omega')。$$

---

① 若 $\Im\frac{\omega'}{\omega}>0$，則由頂點到另一頂點的轉變與環繞平行四邊形境界的正向相同。

由我們的基本平行四邊形的定義，在其內連一對等價點都沒有。另一方面，無論點 u 是什麼樣的，在基本平行四邊形內總可求出一點，而且當然也祇能有一點和它等價。事實上，可求出兩個實數 t、t' 適合於

$$u-c=2t\omega+2t'\omega',$$

如命

$$t=m+r,\quad t'=m'+r',$$

這裏邊 m、m' 是整數且 $0\leqslant r<1$、$0\leqslant r'<1$，則得出：

$$u-(c+2r\omega+2r'\omega')=2m\omega+2m'\omega'。$$

故點 u 和點：

$$c+2r\omega+2r'\omega'$$

等價，且後者在基本平行四邊形內。

研究橢圓函數時，我們可祇在任一基本平行四邊形內來討論它。

基本平行四邊形的起始頂點 c 是任意的。由於這種任意性，我們可作一基本平行四邊形，使在它的邊上函數不等於預先指出的數值，例如不是無窮大。這種挑選週期平行四邊形的方法是可能的，因為橢圓函數像每個有理型函數一樣，在某一有界的領域內取它的每一值都是取有限次。

關於週期等餘的所有點——通常說——作成平面上的正規系或點網。對於這樣的每一系，有某一個平行四邊形網與之對應，這些平行四邊形彼此連結着蓋在全平面上。

設 $f(u)$ 是橢圓函數，2ω、$2\omega'$ 是它的原始週期，且這樣地挑選基本平行四邊形，使在它的邊上 $f(u)$ 為正則的。

求 $f(u)$ 沿平行四邊形境界的積分。由柯西 (Cauchy) 定理，積分的結果等於在平行四邊形內所有極點處函數 $f(u)$ 的留數之和乘以 $2\pi i$ 之積。在另一方面：

$$\int_{\square} f(u)du=\int_{c}^{c+2\omega} f(u)du+\int_{c+2\omega}^{c+2\omega+2\omega'} f(u)du+$$
$$+\int_{c+2\omega+2\omega'}^{c+2\omega'} f(u)du+\int_{c+2\omega'}^{c} f(u)du。$$

在第三個積分內應用代替 $u=v+2\omega'$，因 $f(v+2\omega')=f(v)$ 故得

$$\int_{c+2\omega+2\omega'}^{c+2\omega'} f(u)du=\int_{c+2\omega}^{c} f(v+2\omega')dv=\int_{c+2\omega}^{c} f(v)dv。$$

故第三個積分與第一個積分相消。同様第二個積分與第四個積分相消。故

$$\int_{\square} f(u)du=0。$$

所以 $f(u)$ 在被考察的平行四邊形內各極點處留數之和等於零。由基本平行四邊形的定義兩平行的邊祇有一邊屬於基本平行四邊形。故上述的定理當基本平行四邊形的境界上具有極點時也眞。只須取所有極點在基本平行四邊形上(但不祇是在平行四邊形內)。

由這一定理導出重要的推論。當任一函數在某點之值爲 a 時，我們把該點叫做函數的 a 值點。

1° 取下邊的橢圓函數以代替橢圓函數 $f(u)$

$$\varphi(u)=\frac{f'(u)}{f(u)-a},$$

這裏邊 a 是常數，則可求得在基本平行四邊形內不是常數的橢圓函數 $f(u)$，不論 a 是任何值，它的極點的正常個數(卽連階數也一併計算在內，換句話說，一個 m 階極點應認爲 m 個極點)等於它的 a 值點的正常個數。

2° 在基本平行四邊形內正則的不是常數的橢圓函數不存在。事實上，這樣的橢圓函數在基本平行四邊形內極點的個數爲零，卽由上定理，不論 a 爲任何值，該函數 a 值點的個數也等於零，此爲不合理，因可取 $a=f(u_0)$。

3° 在基本平行四邊形內橢圓函數極點的正常個數(這叫作橢圓函數的級)不能少於 2 。

因此我們自然可想像兩種最簡單的橢圓函數:第一種是在基本平行四邊形內函數具有一個二級的極點,在該極點處函數的留數等於零;第二種是具有二個不同極點,每一極點均爲一級的,在二極點處的留數祇具相反的符號。以後將構造這兩種型的函數。

所有的這些命題全叫做留衞路定理。還有一個定理也叫留衞路定理,就是用

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$$

表明函數 $f(u)$ 在基本平行四邊形內的 a 值點,而且對於每一點計算的次數應看它取 a 值的次數。其次,用

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_m$$

表示函數按照同一原則所寫出的極點。這時與以前同樣,假定 $f(u)$ 不是常數。

由柯西定理

$$2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k-\sum_{k=1}^{m}\beta_k\right\}=\int_{\square}u\frac{f'(u)}{f(u)-a}du,$$

這裏所取的平行四邊形是假定在境界上 $f(u)$ 不取 a 值而且無極點。計算繞境界的積分,像上邊一樣,得

$$\int_{\square}u\frac{f'(u)}{f(u)-a}du=\int_{c}^{c+2\omega}u\frac{f'(u)}{f(u)-a}du+\int_{c+2\omega}^{c+2\omega+2\omega'}+$$

$$+\int_{c+2\omega+2\omega'}^{c+2\omega'}+\int_{c+2\omega'}^{c}=J_1+J_2+J_3+J_4。$$

如在積分 J_3 中利用代替 $u=v+2\omega'$,則得

$$J_3=\int_{c+2\omega}^{c}(v+2\omega')\frac{f'(v)}{f(v)-a}dv。$$

故

$$J_1+J_3=2\omega'\int_{c+2\omega}^{c}\frac{f'(v)}{f(v)-a}dv=$$

$$=2\omega'\{\ln[f(c)-a]-\ln[f(c+2\omega)-a]\};$$

但因 $$f(c)-a=f(c+2\omega)-a,$$
故 $\ln[f(c)-a]$ 與 $\ln[f(c+2\omega)-a]$ 所差者祇爲 $2\pi i$ 的整數倍，故

$$J_1+J_3=2\omega'\cdot 2n'\pi i。$$

同樣可證 $$J_2+J_4=2\omega\cdot 2n\pi i。$$

故 $$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k-\sum_{k=1}^{m}\beta_k=2n\omega+2n'\omega',$$

卽

4° 設考察函數 $f(u)$ 在一個基本平行四邊形內所有的 a 值點與極點，則這些 a 值點的和與這些極點的和爲等餘，這裏邊 a 是任意數。

5. 衞爾斯脫拉斯函數 $\wp(u)$ 玆考察級數

(1) $$\sum_{m,m'}{}'\frac{1}{|2m\omega+2m'\omega'|^p},$$

這裏邊的和是對於任意的整數 m、m' 而作的，但 $m=m'=0$ 的一組①除外，且數 ω、ω' 適合於前邊的假設。我們將證明，上邊寫的級數當 $p>2$ 時收斂，當 $p\leqslant 2$ 時發散。

這樣我們取正規的點組

$$2m\omega+2m'\omega',$$

裏邊的 0 點應除外。先取我們點組內的八個點：

(2) $$\pm 2\omega,\ \pm(2\omega+2\omega'),\ \pm 2\omega',\ \pm(2\omega-2\omega'),$$

這些點是圍繞着點 0 的四個平行四邊形的頂點（圖 2），且構成 0 點的第一層鑲邊。命 0 點與(2)內各點距離中之最小距離爲 d，最大距離爲 D。則級數(1)內與頂點(2)對應的 8 項的和，滿足

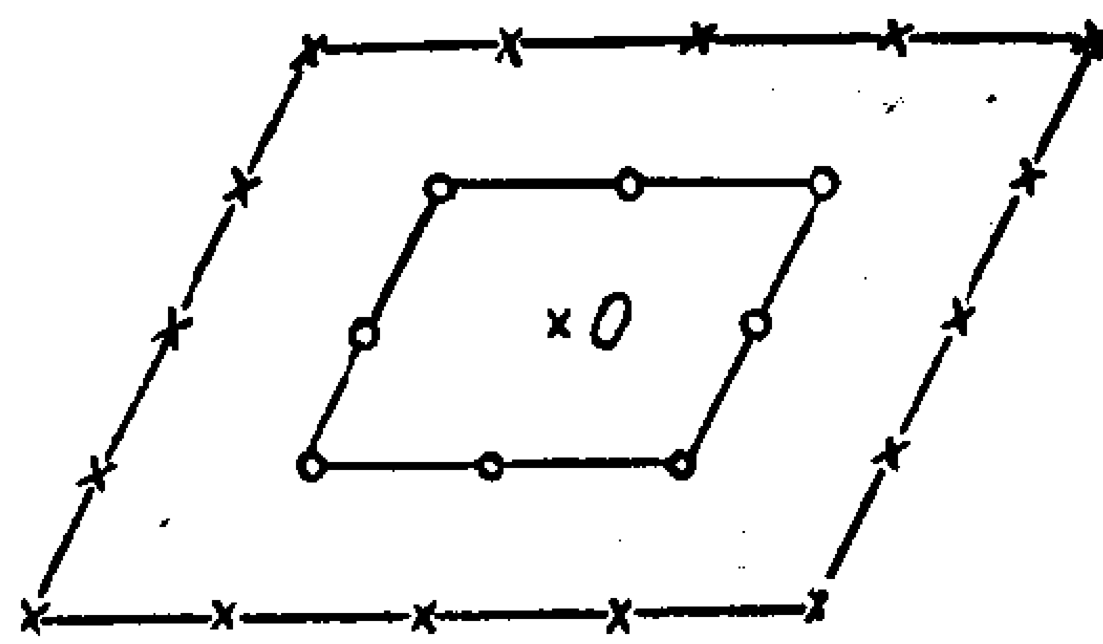


圖 2.

① 這時在符號 Σ 上角加一撇。

不等式

$$\frac{8}{D^p}\leqslant S_1\leqslant\frac{8}{d^p}。$$

今再取我們正規組中屬於 0 的第二層鑲邊的點。這些頂點共有16個，其與 0 的最小和最大距離各爲 $2d$ 及 $2D$。故在級數(1)內與這 16 個頂點相當的項的和 S_2，適合於不等式

$$\frac{16}{(2D)^p}\leqslant S_2\leqslant\frac{16}{(2d)^p};$$

第 n 層鑲邊包含 $8n$ 個頂點，且其相當的和 S_n 適合於不等式

$$\frac{8n}{(nD)^p}\leqslant S_n\leqslant\frac{8n}{(nd)^p}。$$

級數(1)的收斂性和級數：

$$S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots,$$

的收斂性是等價的，而且我們的斷語就是

$$S_n\leqslant\frac{8}{d^pn^{p-1}}$$

及

$$S_n\geqslant\frac{8}{D^pn^{p-1}}$$

的直接推理。

由上述證明，級數

$$\sum_{m,m'}\frac{1}{(u-2m\omega-2m'\omega')^3} \tag{3}$$

在 u 平面的每一有限領域內爲絕對且均一收斂，但應將在該領域內變爲無窮大之項(此等項的項數爲有限個)除去。故級數(3)之和是有理型函數，且點：

$$2m\omega+2m'\omega'$$

是其唯一的極點(均爲三級的)。

命

$$Q(u)=-2\sum_{m,m'}\frac{1}{(u-2m\omega-2m'\omega')^3},$$

則我們將指出,該函數具有週期 2ω、$2\omega'$。事實上,

$$Q(u+2\omega)=-2\sum_{m,m'}\frac{1}{(u+2\omega-2m\omega-2m'\omega')^3}。$$

命

$$m-1=n,$$

則上式可寫爲

$$Q(u+2\omega)=-2\sum_{n,m'}\frac{1}{(u-2n\omega-2m'\omega')^3}。$$

但因數對 (n,m') 與數對 (m,m') 所能取的值一樣,故所得公式右邊是 $Q(u)$,故證明了等式

$$Q(u+2\omega)=Q(u)。$$

完全同樣可證明

$$Q(u+2\omega')=Q(u)。$$

用類似的討論可證明: $Q(u)$ 是奇函數。事實上,

$$Q(-u)=2\sum_{m,m'}\frac{1}{(u+2m\omega+2m'\omega')^3}=$$

$$=2\sum_{n,n'}\frac{1}{(u-2n\omega-2n'\omega')^3}=-Q(u)。$$

這裏應注意的是,數對 (m, m'), (n, n') 取相同值,其中 $n=-m$, $n'=-m'$。

今由積分法引出函數

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\int_0^u\left\{Q(u)+\frac{2}{u^3}\right\}du。$$

此處係假定積分路除去經過點 $u=0$ 外,不經過其他的週期網的頂點。故

$$\wp'(u)=Q(u), \tag{4}$$

但從另一方面,由逐項積分法得:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{m,m'}{}'\left\{\frac{1}{(u-2m\omega-2m'\omega')^2}-\frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^2}\right\}。 \tag{5}$$

因 $Q(u)$ 是奇函數,故 $\wp(u)$ 是偶函數。這種性質也不難由表示式(5)得出。

其次，因 $Q(u)$ 具有週期 2ω，故由(4)得

$$\wp'(u+2\omega)=\wp'(u),$$

這表明：

$$\wp(u+2\omega)=\wp(u)+c, \tag{6}$$

這裏邊 c 是常數。

由展開式(5)知函數 $\wp(u)$ 僅有的極點是

$$2m\omega+2m'\omega',$$

故在點 ω、ω' 處函數 $\wp(u)$ 爲有限的。將 $u=-\omega$ 代入公式(6)，得

$$\wp(\omega)=\wp(-\omega)+c,$$

因函數 $\wp(u)$ 是偶函數，故得出常數 c 爲 0，即

$$\wp(u+2\omega)=\wp(u)。$$

同樣可證

$$\wp(u+2\omega')=\wp(u)。$$

我們可看出，函數 $\wp(u)$ 在每一週期平行四邊形內一共衹有一個二級的極點，故 $\wp(u)$ 是二級的橢圓函數。這樣，照 § 4 所述的意義，$\wp(u)$ 是最簡單的橢圓函數。它是衞爾斯脫拉斯理論的基礎函數。

6. 函數 $\wp(u)$ 的微分方程 在點 $u=0$ 的鄰近，函數 $\wp(u)$ 有以下形狀

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+3u^2\sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^4}+$$
$$+5u^4\sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^6}+\cdots。$$

取符號

$$\sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^4}=\frac{g_2}{60},$$
$$\sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^6}=\frac{g_3}{140}。$$

採用這些符號，就得

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\cdots。 \tag{1}$$

由此，　$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+\frac{g_2}{10}u+\frac{g_3}{7}u^3+\cdots。$$

故　$$[\wp'(u)]^2=\frac{4}{u^6}\left\{1-\frac{g_2}{10}u^4-\frac{g_3}{7}u^6+\cdots\right\},$$

$$[\wp(u)]^3=\frac{1}{u^6}\left\{1+\frac{3g_2}{20}u^4+\frac{3g_3}{28}u^6+\cdots\right\}。$$

由這些展開式及(1)得

$$[\wp'(u)]^2-4[\wp(u)]^3+g_2\wp(u)=-g_3+Au^2+Bu^4+\cdots。$$

左邊是以 2ω、$2\omega'$ 作週期的橢圓函數。它的極點是

$$2m\omega+2m'\omega'。$$

但因如所寫出的公式所表明的，在點 $u=0$ 處，該函數爲正則的且等於 $-g_3$，故在每個以 $u=0$ 爲內點的週期平行四邊形內它爲正則的，因此，由留衛路定理，該函數是一常數。故得下邊的關係式

(2)　$$[\wp'(u)]^2=4[\wp(u)]^3-g_2\wp(u)-g_3。$$

換句話說，就是 $\wp(u)$ 滿足下邊的微分方程

$$z'^2=4z^3-g_2z-g_3。$$

由方程(2)，知 $\wp(u)$ 的各級導數全可用 $\wp(u)$ 及 $\wp'(u)$ 表示出來；例如，

$$\wp''=6\wp^2-\frac{1}{2}g_2,$$

$$\wp'''=12\wp\wp',$$

$$\wp^{(\mathrm{IV})}=120\wp^3-18g_2\wp-12g_3。$$

設　$$4z^3-g_2z-g_3=4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)。$$

則

(3)　$$e_1+e_2+e_3=0,$$

(4)　$$e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{1}{4}g_2,$$

(5)　$$e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3。$$

由(3)及(4)得，

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=\frac{1}{2}g_2。$$

如注意到 $\wp'(u)$ 是奇函數且在等式

$$\wp'(u+2\omega)=\wp'(u)$$

中命 $u=-\omega$，則得 $\wp'(\omega)=0$ [應當注意，$\wp'(\omega)$ 爲有限的]。同樣可得出

$$\wp'(\omega')=0, \quad \wp'(\omega+\omega')=0。$$

我們看出來，點 ω、$\omega+\omega'$、ω' 是函數 $\wp'(u)$ 的零點且爲簡單的零點，因爲 $\wp'(u)$ 是三級的橢圓函數。

注意，下邊的量彼此不相同：

$$\wp(\omega), \ \wp(\omega'), \ \wp(\omega+\omega')。$$

因事實上，假設裏邊眞要有二個相同，例如等式

$$\wp(\omega)=\wp(\omega+\omega')$$

成立，則二級的橢圓函數

$$\wp(u)-\wp(\omega)$$

將具有兩個二級零點(ω, $\omega+\omega'$)，這是不可能的。

由(2)，知量

$$\wp(\omega), \ \wp(\omega+\omega'), \ \wp(\omega')$$

與下邊的多項式的根相同：

$$4z^3-g_2z-g_3。$$

故數 $$e_1, \ e_2, \ e_3,$$

彼此不相同。

通常爲方便起見用下邊的符號：

$$2\omega_1=2\omega,$$

$$2\omega_2=-2\omega-2\omega' \quad \left(\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}, \ \Im\tau>0\right),$$

$$2\omega_3=2\omega',$$

如是則 $$\omega_1+\omega_2+\omega_3=0。$$

同時可命 $$\wp(\omega_k)=e_k \quad (k=1,\ 2,\ 3)。$$

不妨注意，判别式

$$g_2^3-27g_3^2$$

等於 $$16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2。$$

第二章　模函數

7. 不變式　前節裏我們曾遇到多項式

(1)　$$4x^3-g_2x-g_3。$$

這是三次多項式的最方便的標準形之一。它是被衞爾斯脫拉斯導入在橢圓函數論中的。

我們現今取一個任意的四次沒有重根的多項式

(2)　$$f(z)=a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4。$$

係數 a_0 可以等於零。這表明，多項式(2)的那些根中有一個爲無限大。若 $a_0=0$，則係數 a_1 可以看成不爲零，這點不必預先說明，因設係數 a_0、a_1 全是零，則多項式(2)在無窮遠有重根。

我們想證明，如何用簡單的變換將多項式(2)變爲標準形(1)。

先假定 $a_0=0$，即

$$f(z)=4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4,$$

且命

$$z=\frac{x}{a_1}-\frac{a_2}{2a_1},$$

$$f(z)=\frac{1}{a_1^2}F(x)。$$

由簡單的計算示明，多項式 $F(x)$ 最高次項的係數是 4，且在 $F(x)$ 內沒有 x^2 的項。

這樣就可命

$$F(x)=4x^3-g_2x-g_3。$$

新的係數 g_2、g_3 容易用舊的係數 a_i 表示出來。

$$g_2=-4a_1a_3+3a_2^2,$$

$$g_3=-a_2^3+2a_1a_2a_3-a_1^2a_4=\begin{vmatrix}0 & a_1 & a_2\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_4\end{vmatrix}。$$

現在來談 $a_0\neq 0$ 的情形，假定我們知道多項式 $f(z)$ 的一個根。叫它是 α，且作變換

$$z=\alpha+\frac{1}{y},$$

$$f(z)=\frac{1}{y^4}g(y)。$$

則得到

$$g(y)=f'(\alpha)y^3+\frac{f''(\alpha)}{1\cdot 2}y^2+\frac{f'''(\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3}y+\frac{f^{(IV)}(\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=$$
$$=4b_1y^3+6b_2y^2+4b_3y+b_4,$$

其中

$$b_1=\frac{1}{4}f'(\alpha)$$

不是零，因爲 α 是多項式 $f(z)$ 的單根。這樣，我們就把它化成前邊的情形了，故我們只要命

$$y=\frac{x}{b_1}-\frac{b_2}{2b_1},$$

$$g(y)=\frac{1}{b_1^2}F(x)$$

就可以了。在第一種情形 $(a_0=0)$ 要把它變成標準形必須把變數 z 施以整式線形變換。現今對 $a_0\neq 0$ 的情形，則必須作下列的分式線形變換

$$z=\alpha+\cfrac{1}{\cfrac{x}{b_1}-\cfrac{b_2}{2b_1}}。$$

它可表成下邊的形式

$$z=\alpha+\frac{f'(\alpha)}{4\left\{x-\frac{1}{24}f''(\alpha)\right\}}。$$

至於變換後的多項式

$$F(x)=4x^3-g_2x-g_3$$

的係數 g_2、g_3，可用初等的但是十分冗長的計算，得到通過舊係數 a_0、a_1、a_2、a_3、a_4 的表達式：

$$g_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2, \tag{3}$$

$$g_3=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}。 \tag{4}$$

欲得前邊所求出的第一種情形的公式在這裏邊取 $a_0=0$ 卽可。

有時用形式

$$\varphi(x_1, x_2)=a_0x_1^4+4a_1x_1^3x_2+6a_2x_1^2x_2^2+4a_3x_1x_2^3+a_4x_2^4 \tag{5}$$

以替代多項式(2)，並討論將它變成新變量的線形變換

$$x_1=\alpha y_1+\beta y_2, \tag{6}$$
$$x_2=\gamma y_1+\delta y_2,$$

其中
$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}\neq 0。$$

命
$$\varphi(x_1, x_2)=\psi(y_1, y_2),$$

其中 $\psi(y_1, y_2)=b_0y_1^4+4b_1y_1^3y_2+6b_2y_1^2y_2^2+4b_3y_1y_2^3+b_4y_2^4$。

由單純的但稍有一點冗長的計算，不難驗證

$$b_0b_4-4b_1b_3+3b_2^2=D^4(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2) \tag{7}$$

及

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}=D^6\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}。 \tag{8}$$

設形式(5)的係數所構成的函數 F 經過變換(6)後有下列等式成立

$$F(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)=D^mF(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4),$$

則稱 F 爲(5)關於變換(6)而權爲 m 的**相對不變式**。若權等於

零，則稱不變式爲絕對不變式。公式(7)及(8)表明，以前的式子

$$(3)\qquad g_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,$$

$$(4)\qquad g_3=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

是相對不變式，其權各爲 4 及 6 。

量
$$J=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$$
是絕對不變式。

8. 模形式　二數 2ω、$2\omega'$ 的比

$$(1)\qquad \tau=\frac{\omega'}{\omega}$$

的虛數部份不是零，已知其在平面上產生一個平面上點的正規系。這些點的正規系可由若干其他數對得出。

若數 2ω、$2\omega'$ 能用 $2\tilde{\omega}$、$2\tilde{\omega}'$ 的整係數的線性結合表示出來，且數 $2\tilde{\omega}$、$2\tilde{\omega}'$ 也能用數 2ω、$2\omega'$ 的類似結合表示出來，則不難看出數對 $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ 也能產生一組點的正規系。爲的要這個成立，則必須且僅須滿足於下邊的等式

$$(2)\qquad \begin{aligned} \tilde{\omega}' &= \alpha\omega'+\beta\omega, \\ \tilde{\omega} &= \gamma\omega'+\delta\omega, \end{aligned}$$

其中 α、β、γ、δ 是整數，且用下邊的關係式連結起來：

$$(3)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1。$$

設我們需要比 $\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$ 的虛數部份的號和比 $\frac{\omega'}{\omega}$ 的虛數部份的號相同，則關係式(3)內右邊的負號應去掉①。在這種情形下，數對$(2\omega,$

① 事實上容易驗證由

$$\tilde{\tau}=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

可推出

$$\Im\tilde{\tau}=\Im\tau\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{|\gamma\tau+\delta|^2}。$$

$2\omega'$)、$(2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}')$叫做**等價的**。

我們在 § 6 內遇到的不變式 g_2、g_3，是由一對原始週期，卽數對 2ω、$2\omega'$ 作成全體點的正規系所產生的相當的和，但零點除外[關於數對 2ω、$2\omega'$，量(1)不是實數]：

$$g_2=60\sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^4},$$

$$g_3=140\sum_{m,m'}{}' \frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^6}。$$

容易看出，當以其他產生點的正規系的數對替代數對$(2\omega,\ 2\omega')$時，這些量不改變。特别，數對$(2\omega,\ 2\omega')$代以它的等價數對$(2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}')$時，$g_2$、$g_3$ 不變。在另一方面，由量 g_2、g_3 的定義直接得

$$g_2(t\omega,\ t\omega')=\frac{1}{t^4}g_2(\omega,\ \omega'),$$

$$g_3(t\omega,\ t\omega')=\frac{1}{t^6}g_3(\omega,\ \omega')。$$

用數對$(2t\omega,\ 2t\omega')$替代$(2\omega,\ 2\omega')$相當於將最初的點網代以另外相似的點網。由此可見，關於這樣的變换，量 g_2、g_3 是改變的。但量

$$J=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$$

顯然不祇在數對代以它的等價數對$(2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}')$時不變，卽數對$(2\omega,\ 2\omega')$以產生相似的點網的數對$(2t\omega,\ 2t\omega')$代替時也不變。這樣，這個前邊曾經叫作絶對不變式的量 J，是一個變數的函數，卽比 $\tau=\dfrac{\omega'}{\omega}$ 的函數，而且還具有下邊的性質：任意的整數[illegible] γ、δ 如果滿足於關係式

(4) $$\alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

則下邊的等式成立

$$J\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=J(\tau)。$$

線形變換

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},$$

其中 α、β、γ、δ 是整數且滿足於關係式(4)[①]叫作**模變換**。

關於模變換為不變的解析函數叫作**模函數**。下邊將證明，$J(\tau)$是解析函數。故 $J(\tau)$是模函數。至於不變式 g_2、g_3，它們不是 τ 的函數，故自然可叫作 ω、ω' 的模形式。

我們將用字母 S, T, … 表明模變換。例如，設

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},$$

我們則可寫

$$\tau'=S\tau \tag{5}$$

與

$$S=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha & -\beta\\ -\gamma & -\delta\end{pmatrix}。$$

么變換 $\qquad \tau'=\tau$

也是模變換。用字母 I 表示它：

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}。$$

寫法(5)強調出，τ' 可以考慮作將某一運算施於 τ 所得的結果。

若

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}=S\tau,$$

則

$$\tau=\frac{-\delta\tau'+\beta}{\gamma\tau'-\alpha}=\frac{\delta\tau'-\beta}{-\gamma\tau'+\alpha}。$$

變換

$$\begin{pmatrix}-\delta & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$$

也是模變換，叫作變換

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=S$$

---

① 關係式 4 表明被考察的變換的行列式等於 1。

的反變換，且用符號 S^{-1} 表示它。

對於 τ 施行模變換 S_1，再對於所得的結果施行變換，即對於 $S_1\tau$ 施行模變換 S_2，這樣就得出某一個 τ'。τ' 容易用 τ 表示出來。命

$$\tau^* = S_1\tau, \quad \tau' = S_2\tau^*。$$

則

$$\tau' = \frac{\alpha_2\tau^* + \beta_2}{\gamma_2\tau^* + \delta_2} = \frac{\alpha_2(\alpha_1\tau + \beta_1) + \beta_2(\gamma_1\tau + \delta_1)}{\gamma_2(\alpha_1\tau + \beta_1) + \delta_2(\gamma_1\tau + \delta_1)} = \frac{(\alpha_2\alpha_1 + \beta_2\gamma_1)\tau + (\alpha_2\beta_1 + \beta_2\delta_1)}{(\gamma_2\alpha_1 + \delta_2\gamma_1)\tau + (\gamma_2\beta_1 + \delta_2\delta_1)}。$$

由此我們看出 τ' 可對於 τ 用某一變換 S 得出來。這個變換的矩陣

$$\begin{pmatrix} \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\gamma_1 & \alpha_2\beta_1 + \beta_2\delta_1 \\ \gamma_2\alpha_1 + \delta_2\gamma_1 & \gamma_2\beta_1 + \delta_2\delta_1 \end{pmatrix}$$

是變換 S_2 與 S_1 的矩陣的乘積。所以變換 S 的矩陣的行列式等於 1，即 S 也是模變換。變換 S 是變換 S_2、S_1 結合的結果，照例叫作變換 S_2 與 S_1 的乘積。同時若

$$\tau' = S_2(S_1\tau)$$

則可寫作

$$S = S_2S_1$$

及

$$\tau' = (S_2S_1)\tau = S_2S_1\tau。$$

若按相反的順序來乘，則得

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2 \\ \gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2 \end{pmatrix}。$$

從這裏看出來，一般地說，$S_1S_2 \neq S_2S_1$，即乘法的運算不服從交換律。故必須將變換自右邊的乘積與變換自左邊的乘積區別開來。

對於我們所考察的乘法的運算，全體模變換的集合作成一個羣，而且 S 的反元素是 S^{-1}。事實上，

$$SS^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha\delta + \beta\gamma & \alpha\beta - \beta\alpha \\ -\gamma\delta + \delta\gamma & \beta\gamma - \alpha\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I$$

而且
$$S^{-1}S=I_{\circ}$$
函數 $J(\tau)$ 關於這個變換羣是不變的。應當時常注意另外分式線形變換的羣。每個解析函數關於這樣的變換羣不變時叫作保型函數(автоморфная функция)。這樣，絕對不變式 $J(\tau)$ 就是保型函數的一個例。更簡單的保型函數的例是週期函數。

9. 函數 $J(\tau)$ 的基本領域　雙週期函數的基本領域是平行四邊形，對於每一對邊則去掉一邊(基本平行四邊形)。使雙週期函數不變的變換羣是由下邊兩個基本變換產生的:
$$S \qquad \tilde{u}=u+2\omega,$$
$$S' \qquad \tilde{u}=u+2\omega',$$
就是，這羣中的每一變換全是這兩個變換的結合(乘積)。每一基本變換 S 或 S' 將週期平行四邊形的一邊變爲其對邊(圖 3)。羣內全體變換施於基本平行四邊形，則得出無數個合同的平行四邊形，它們覆蓋全平面一次。

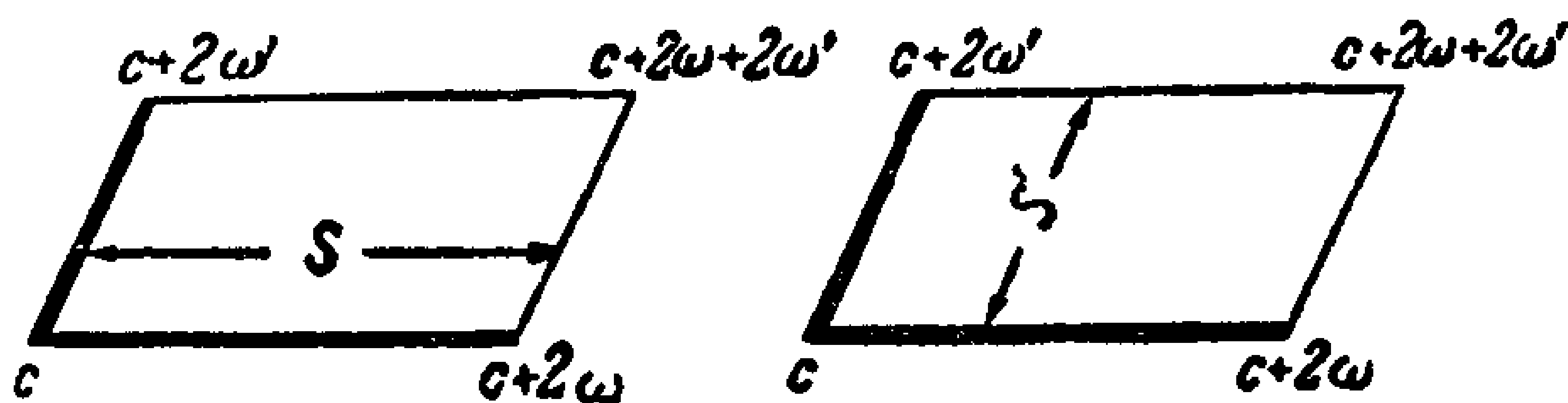


圖 3.

現今轉到模函數 $J(\tau)$，且將證明，對於它，有類似的情形發生。用 Σ 表明使 $J(\tau)$ 不變的模變換羣。今將證明，Σ 是由下邊的兩個基本變換產生的:
$$S=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad \tilde{\tau}=\tau+1,$$
$$T=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad \tilde{\tau}=-\frac{1}{\tau}。$$
命
$$V=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$$

是羣 Σ 中的任意變換。

應用變換的乘法法則，得

$$VT=\begin{pmatrix}\beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma\end{pmatrix},$$

與
$$VS=\begin{pmatrix}\alpha & \beta+\alpha \\ \gamma & \delta+\gamma\end{pmatrix},\quad VS^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta-\alpha \\ \gamma & \delta-\gamma\end{pmatrix},$$

而且一般地，對於任意的整數 n,

$$VS^{-n}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta-n\alpha \\ \gamma & \delta-n\gamma\end{pmatrix}。$$

我們將連續地應用兩個運算：用變換 S 的某一乘冪(由右邊)乘變換，再用變換 T 乘所得的結果。我們將證明，這樣根據(任意)變換 V 可得

$$VS^{-n}TS^{-m}T\cdots TS^{-k}=\begin{pmatrix}\alpha^* & 0 \\ \gamma^* & \delta^*\end{pmatrix},$$

對於它，$\beta^*=0$。

設 $\beta=0$，則起始的變換就有所求的性質。假定 $\beta\neq0$，決定一整數 n，使

$$|\beta-n\alpha|<|\alpha|。$$

這樣求得 n 後，考察變換

$$V_1=VS^{-n}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta-n\alpha \\ \gamma & \delta-n\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix};$$

這裏
$$|\beta_1|<|\alpha_1|。$$

若 $\beta_1=0$，這就是我們所要求的變換。但若 $\beta_1\neq0$，用變換 TS^{-m} 乘(自右邊乘) V_1，這裏邊 m 是整數，結果得變換

$$V_2=V_1TS^{-m}=\begin{pmatrix}\beta_1 & -\alpha_1-m\beta_1 \\ \delta_1 & -\gamma_1-m\delta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix},$$

這裏挑選的 m 滿足於

$$|\alpha_1+m\beta_1|<|\beta_1|。$$

這樣,對於變換 V_2 有 $|\beta_2|<|\alpha_2|$。但因

$$|\alpha_2|=|\beta_1|,$$

故

$$|\beta_2|<|\beta_1|。$$

若 $\beta_2\neq 0$, 再重複上邊的運算,結果即可得到

$$V_3=V_2TS^{-l}=\begin{pmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \gamma_3 & \delta_3\end{pmatrix},$$

其中

$$|\beta_3|<|\beta_2|。$$

因爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3\cdots$ 全是整數,故經過有限次運算後,我們可得到變換

$$VS^{-n}TS^{-m}\cdots TS^{-k}=\begin{pmatrix}\alpha^* & 0\\ \gamma^* & \delta^*\end{pmatrix}。$$

但因這個變換是模變換,故 $\alpha^*=\delta^*=1$。因而

$$VS^{-n}TS^{-m}\cdots TS^{-k}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix},$$

其中 i 是某一個整數。

但

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}=TS^iT,$$

故

$$VS^{-n}TS^{-m}T\cdots TS^{-k}=TS^iT,$$

由此,自右邊用 $S^kT\cdots TS^mTS^n$ 乘上式的兩邊,得

$$V=TS^iTS^kT\cdots TS^mTS^n。$$

這樣我們的命題就完全證明了。

爲的要得函數 $J(\tau)$ 的基本領域,在上半平面用

$$\Re\tau=-\frac{1}{2},\ \Re\tau=\frac{1}{2},\ |\tau|=1$$

做邊作一三角形。且領域 D 是以下的點的集合:三角形內部的點,左邊的邊 $\Re\tau=-\frac{1}{2}$ 上的點及圓周 $|\tau|=1$ 上滿足於 $-\frac{1}{2}\leqslant\Re\tau\leqslant 0$ 的點。這樣,領域 D 可以看成是一個四角形(圖 4),對於伴隨領域

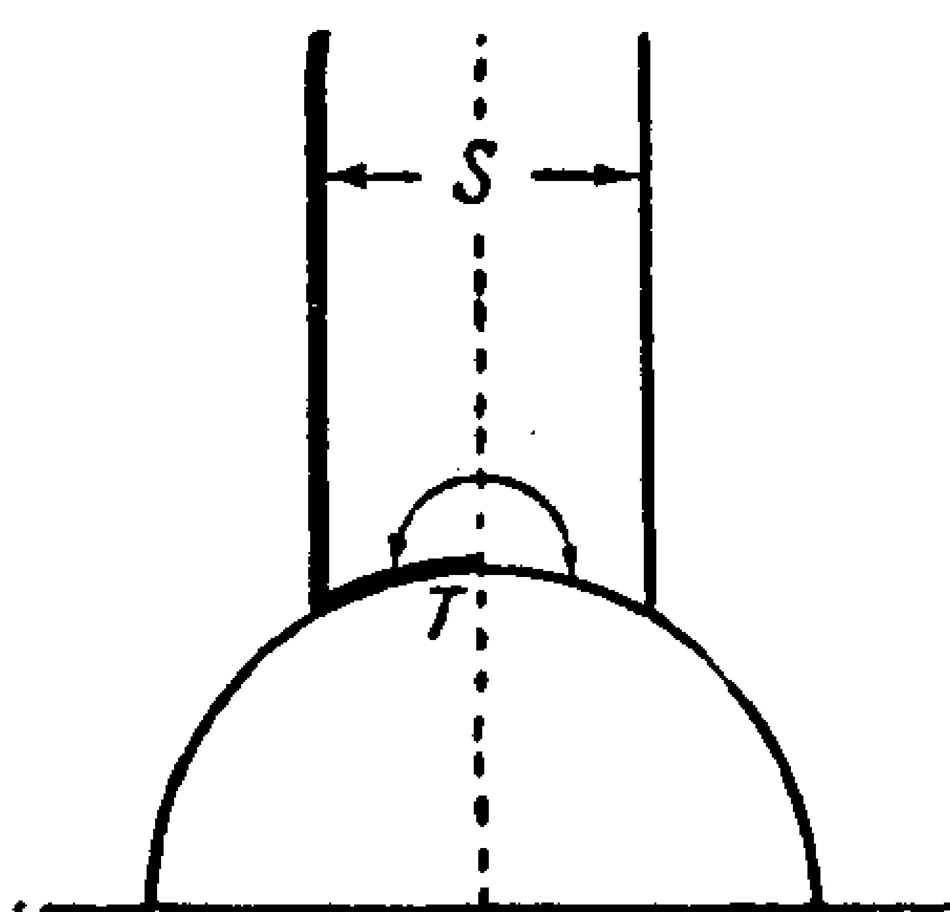


圖 4.

D 的四個邊中祇有二個(圖形內粗線表明的)屬於它。

基本變換 S、T 繫聯四角形的對邊;卽 S 繫聯鉛直的對邊,但 T 則如圖所表示者將圓弧的左邊移到右邊。

D 是函數 $J(\tau)$ 的基本領域的證明相當複雜。

首先須證明,對於上半平面的每一點 τ,在 D 內一定有一點 τ' 和它等價,所謂二點 τ、τ' 等價者就是在 Σ 內有一變換 V 能使 $\tau'=V\tau$。

若有一點 $\tau(\Im\tau>0)$,則可確定一整數 α,使點

$$\tau_1=\tau+\alpha=S^{\alpha}\tau$$

滿足於不等式

$$-\frac{1}{2}\leqslant\Re\tau_1<\frac{1}{2}。$$

若原來

$$|\tau_1|>1$$

或

$$|\tau_1|=1,\quad -\frac{1}{2}\leqslant\Re\tau_1\leqslant 0,$$

則 τ_1 是所求的領域 D 內的點,且與點 τ 等價。若原來

$$|\tau_1|=1,\quad 0<\Re\tau_1<\frac{1}{2},$$

則所求的等價點將為

$$\tau_2=T\tau_1=-\frac{1}{\tau_1}。$$

最後,若原來

$$|\tau_1|<1,$$

則取點

$$\tau_2=T\tau_1,$$

且像以前處理 τ 那樣地來處理它,即對於適當的 α 施行運算 S^{α} 於 τ_2,這樣,可得出 τ_3,使 $-\frac{1}{2}\leqslant\Re\tau_3<\frac{1}{2}$;然後,如果需要的話,命

$$\tau_4 = T\tau_3$$

等等。

命　$$\tau_k = \xi_k + i\eta_k。$$

由我們上邊的作法，

$$-\frac{1}{2} \leqslant \xi_{2k-1} < \frac{1}{2}。$$

其次因　$$\tau_{2k} = -\frac{1}{\tau_{2k-1}},$$

故　$$\xi_{2k} = -\frac{\xi_{2k-1}}{\xi_{2k-1}^2 + \eta_{2k-1}^2}, \quad \eta_{2k} = \frac{\eta_{2k-1}}{\xi_{2k-1}^2 + \eta_{2k-1}^2}。$$

故如　$$0 < \eta_{2k-1} < \frac{1}{2},$$

則　$$\eta_{2k} > 2\eta_{2k-1}。$$

由此，有這樣的整數 n 存在使

$$-\frac{1}{2} \leqslant \xi_n < \frac{1}{2}, \quad \eta_n \geqslant \frac{1}{2}。$$

若　$$\xi_n^2 + \eta_n^2 > 1$$

或　$$\xi_n^2 + \eta_n^2 = 1, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \xi_n \leqslant 0,$$

則 τ_n 是領域 D 內欲求的與點 τ 等價的點。設

$$\xi_n^2 + \eta_n^2 = 1, \quad 0 < \xi_n < \frac{1}{2},$$

則欲求的點是 $\tau_{n+1} = -\frac{1}{\tau_n}$。剩下的是考察

$$\xi_n^2 + \eta_n^2 < 1$$

的情形。在這一情形中我們將證明，欲求的點是 τ_{n+2}。事實上，

$$\tau_{n+2} = \frac{-\xi_n + \alpha(\xi_n^2 + \eta_n^2)}{\xi_n^2 + \eta_n^2} + i\frac{\eta_n}{\xi_n^2 + \eta_n^2},$$

這裏的整數 α 使

$$-\frac{1}{2} \leqslant \xi_{n+2} < \frac{1}{2}。$$

因爲

$$|\tau_{n+2}|^2=\frac{(\xi_n^2+\eta_n^2)\{1-2\alpha\xi_n+\alpha^2(\xi_n^2+\eta_n^2)\}}{(\xi_n^2+\eta_n^2)^2}=$$

$$=\frac{1-2\alpha\xi_n+\alpha^2(\xi_n^2+\eta_n^2)}{\xi_n^2+\eta_n^2}=\frac{(1-\alpha\xi_n)^2+\alpha^2\eta_n^2}{\xi_n^2+\eta_n^2}$$

及 $$\xi_n^2+\eta_n^2<1,\quad \eta_n\geqslant\frac{1}{2},$$

故祇當 $$\alpha=-1,\quad \xi_n=-\frac{1}{2}$$

時 $|\tau_{n+2}|$ 才等於 1。在所有其餘的情形中 $|\tau_{n+2}|$ 全是大於 1, 故欲求的與 τ 等價的點是 τ_{n+2}。但假定

$$\alpha=-1,\quad \xi_n=-\frac{1}{2},$$

使 $$|\tau_{n+2}|=1,$$

則 $$\xi_{n+2}=-\frac{\xi_n}{\xi_n^2+\eta_n^2}-1=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\eta_n^2}-1\leqslant 0,$$

故 τ_{n+2} 仍在領域 D 內。

現今將證明,在 D 內沒有等價點。假定不是這樣,設在 D 內有二點 τ,τ' 等價。則它們不能用變換 S^α 或變換 T 來緊連。就是說,

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\ \left(\neq-\frac{1}{\tau}\right),$$

其中 $\gamma>0$。

因 $$\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma(\gamma\tau+\delta)},$$

或 $$\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{1}{\gamma(\gamma\tau+\delta)},$$

故 $$\left|\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}\right|\cdot\left|\tau+\frac{\delta}{\gamma}\right|=\frac{1}{\gamma^2}。$$

由假設點 τ、τ' 均在領域 D 內。但因爲數

$$\left|\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}\right|,\quad \left|\tau+\frac{\delta}{\gamma}\right|$$

表明這些點到實數軸上某兩點的距離，且二距離的乘積等於 $\frac{1}{\gamma^2}$，故第一、γ 祇能等於1；第二、下邊的二等式必須成立：

$$|\tau'-\alpha|=1,\quad |\tau+\delta|=1;$$

第三、$\delta=0$ 或 $\delta=1$，最後、$\alpha=0$ 或 $\alpha=-1$。$\alpha=-1$, $\delta=1$ 的情形不要，因這時將有 $\tau=\tau'$。

因 $\tau'\neq T\tau$，故 $\alpha=0$, $\delta=0$ 的情形也不要。故有 $\alpha=0$, $\delta=1$ 或 $\alpha=-1$, $\delta=0$。

今注意第一種可能，此時 $\beta=-1$，而且

$$\tau'=-\frac{1}{\tau+1}。$$

因 $\delta=1$，故由 $|\tau+\delta|=1$ 得

$$\tau=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

故

$$\tau'=-\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\tau,$$

這和所給的條件相反。同樣 $\alpha=-1$, $\delta=0$ 的情形也應除外，故證明了我們的斷言。

設給領域 D 以變換羣 Σ 內的全體變換，則得出無數個領域，全與領域 D 等價。因對於上半平面的任意點已經證明 D 內一定有一點和它等價，故這些領域覆蓋全部上半平面。另外，這些領域彼此不能覆蓋，因假定彼此覆蓋的話，則在上半平面內至少有二點 τ_1、τ_2 存在，使羣 Σ 內有二個變換 V'、V'' 將 D 內的某二點用這兩個變換均變爲 τ_1 或 τ_2。但因二等式

$$V'\tau_1=V''\tau_1,\quad V'\tau_2=V''\tau_2$$

爲不可能，且因二次方程式

$$V'\tau=V''\tau$$

的根是共軛的，故在D內可求出兩個互異的等價點($V'\tau_1$、$V''\tau_1$或$V'\tau_2$、$V''\tau_2$)，這是不可能的。

由上所證知，領域D具有週期平行四邊形的一般性質：D是模函數$J(\tau)$的基本領域。它也叫做羣Σ的基本領域。

10. 模函數 $J(\tau)$ 我們將證明，$J(\tau)$在上半平面內的每一點全是正則的。因

$$J(\tau)=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2},$$

這裏邊我們可取

$$(1)\qquad g_2=g_2(1,\ \tau),\quad g_3=g_3(1,\ \tau),$$

且因在上半平面有

$$g_2^3-27g_3^2\neq 0,$$

故足能證明函數(1)在上半平面爲正則。爲此目的，茲證級數

$$(2)\qquad g_2(1,\ \tau)=60\sum_{m,m'}{}'\frac{1}{(m+m'\tau)^4},$$

$$(3)\qquad g_3(1,\ \tau)=140\sum_{m,m'}{}'\frac{1}{(m+m'\tau)^6},$$

在上半平面的每一閉領域內爲均一收斂。

命S是這樣的一個領域，δ是S到實數軸的距離，且N是領域S內的τ的模數最大值。

取這樣小的$\varepsilon>0$ ($\varepsilon<1$)，使它滿足於

$$(1-\varepsilon^2)(\delta^2-\varepsilon^2)>\varepsilon^2N^2。$$

命$\tau=\xi+i\eta$，若$\tau\in S$，則$|\xi|\leqslant N$，$\eta\geqslant\delta$。故

$$(4)\qquad \frac{|m+m'\tau|^2}{|m+m'i|^2}=\frac{m^2+m'^2(\xi^2+\eta^2)+2mm'\xi}{m^2+m'^2}=$$

$$=\varepsilon^2+\frac{(1-\varepsilon^2)m^2+2mm'\xi+(\xi^2+\eta^2-\varepsilon^2)m'^2}{m^2+m'^2}。$$

但右邊的第二項不論m、m'爲任何實數常爲正數，蓋因$1-\varepsilon^2>0$

而分子是一個二次形式，其判別式等於

$$\begin{vmatrix} 1-\varepsilon^2 & \xi \\ \xi & \xi^2+\eta^2-\varepsilon^2 \end{vmatrix}=(1-\varepsilon^2)(\xi^2+\eta^2-\varepsilon^2)-\xi^2,$$

但因當 $\tau\in S$（由上法挑選的 ε）時

$$(1-\varepsilon^2)(\eta^2-\varepsilon^2)>\varepsilon^2\xi^2,$$

故上判別式爲正。

這樣，由（4）可見，對於任意的 $\tau\in S$ 有

$$\frac{|m+m'\tau|^2}{|m+m'i|^2}\geqslant\varepsilon^2。$$

根據這一個不等式，對於任意 $\tau\in S$ 有

$$\frac{1}{|m+m'\tau|^4}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^4|m+m'i|^4},$$

$$\frac{1}{|m+m'\tau|^6}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^6|m+m'i|^6},$$

這就證明了級數（2）、（3）在 S 內的均一收斂性。

今將 $J(\tau)$ 看成 $h^2=e^{2\pi i\tau}$ 的函數。因 $J(\tau+1)=J(\tau)$，故 $J(\tau)$ 是 h^2 ($|h|<1$) 的單值函數。當 $|h|<1$ 時下列展開式成立的證明對於以後是很重要的：

$$J(\tau)=\frac{1}{h^2}(c_0+c_1h^2+c_2h^4+\cdots),$$

其中 $c_0\neq0$。我們將證明這一展開式且順便得出

$$c_0=\frac{1}{1728}。$$

爲此取著名的展開式（參看表 I）

$$\pi\operatorname{ctg}\pi u=\frac{1}{u}+\sum_m{}'\left\{\frac{1}{u+m}-\frac{1}{m}\right\},$$

命 $w=e^{2\pi iu}$，則當 $|w|<1$ 時，

$$\operatorname{ctg}\pi u=i\frac{w+1}{w-1}=-i(1+2w+2w^2+\cdots),$$

因此有

$$\frac{1}{u}+\sum_{m}'\left\{\frac{1}{u+m}-\frac{1}{m}\right\}=-\pi i(1+2w+2w^2+\cdots)。$$

由此，關於 u 微分三次，得

$$-6\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(u+m)^4}=-16\pi^4(w+8w^2+\cdots)。$$

再微分兩次，得

$$-120\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(u+m)^6}=64\pi^6(w+32w^2+\cdots)。$$

令命 $u=m'\tau\ (m'>0)$，這樣就得

$$6\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+m'\tau)^4}=16\pi^4(h^{2m'}+8h^{4m'}+\cdots),$$

$$120\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+m'\tau)^6}=-64\pi^6(h^{2m'}+32h^{4m'}+\cdots)。$$

故

$$g_2(1,\ \tau)=60\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^4}+2\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+m'\tau)^4}\right\}=$$

$$=60\left\{\frac{\pi^4}{45}+\frac{16}{3}\pi^4\sum_{m'=1}^{\infty}(h^{2m'}+8h^{4m'}+\cdots)\right\}=$$

$$=\pi^4\left(\frac{4}{3}+320h^2+\cdots\right)$$

及

$$g_3(1,\ \tau)=140\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^6}+2\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+m'\tau)^6}\right\}=$$

$$=140\left\{\frac{2\pi^6}{945}-\frac{16}{15}\pi^6\sum_{m'=1}^{\infty}(h^{2m'}+32h^{4m'}+\cdots)\right\}=$$

$$=\pi^6\left(\frac{8}{27}-\frac{448}{3}h^2+\cdots\right)。$$

由此
$$g_2^3-27g_3^2=\pi^{12}(4096h^2+\cdots)$$

及
$$J(\tau)=\frac{\left(\frac{4}{3}+320h^2+\cdots\right)^3}{4096h^2+\cdots}=\frac{1}{1728}\frac{1}{h^2}+c_1+c_2h^2+\cdots$$

我們的斷言就證明了。

下邊的定理對於以後有很重要的意義。對於無論怎樣的數 c，方程

$$J(\tau)-c=0 \tag{5}$$

在領域 D 內有一個且祇有一個根。

這定理證明的根據是：設 $f(z)$ 在領域 G 內爲正則，則方程

$$f(z)-c=0$$

在領域 G 內根的個數等於

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)-c}dz,$$

其中 L 是 G 的境界，且 $f(z)$ 在 L 上連續而不等於 c。

命 $\tau=\xi+i\eta$。因由上邊的證明，

$$J(\tau)=\frac{1}{1728}e^{-2\pi i\tau}+c_1+c_2e^{2\pi i\tau}+\cdots,$$

故當 $\eta\to\infty$ 時函數 $J(\tau)$ 關於 ξ 均一地趨於無限大。故對於任意的 c 可以找出這樣的 H，使當 $\eta\geqslant H$ 時有 $|J(\tau)|>|c|$，卽方程(5)當 $\eta\geqslant H$ 時沒有根。這樣，我們祇注意 D 的部份領域 D_H（用線 $MABA'M'$ 包圍的領域）（圖 5）就夠了。

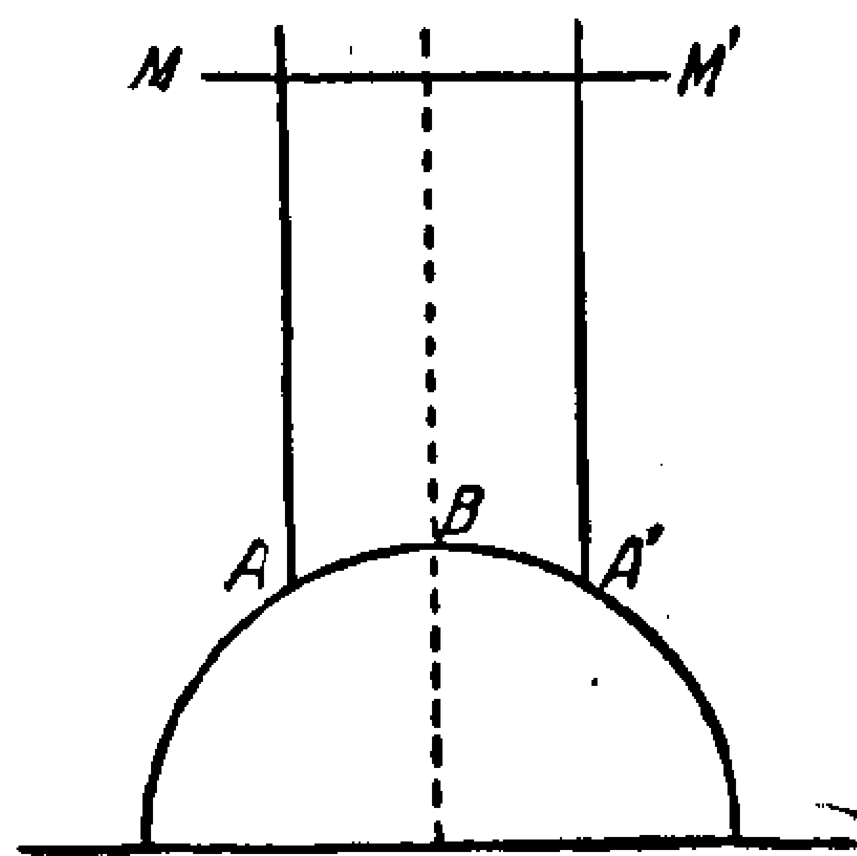


圖 5.

設方程(5)在線 $MABA'M'$ 上沒有根，則定理的證明很簡單。事實上，

$$N=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{J'(\tau)}{J(\tau)-c}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{MA}+\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}+\frac{1}{2\pi i}\int_{BA'}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{A'M'}+\frac{1}{2\pi i}\int_{M'M}d\ln\{J(\tau)-c\}=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5。$$

函數

$$\varphi(\tau)=J(\tau)-c$$

滿足關係式

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\varphi(\tau),\quad \varphi(\tau+1)=\varphi(\tau)。 \tag{α}$$

在積分 J_2 內假定

$$\tau=-\frac{1}{t},$$

則得

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}d\ln\varphi(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{A'B}d\ln\varphi(t)=-J_3。$$

這樣,就有 $$J_2+J_3=0。$$

類似地,也許還更簡單地可證

$$J_1+J_4=0。$$

故 $$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{M'M}d\ln\varphi(\tau),$$

$J(\tau)$ 可認為 $z=h^2=e^{2\pi i\tau}$ 的函數。與 τ 平面上的線段 $M'M$ 對應的是 z 平面上的圓周

$$|z|=e^{-2\pi H}。\tag{6}$$

在這一圓周上及其內部,函數 $\varphi(\tau)$ 不是零,而且若除去點 $z=0$, $\varphi(\tau)$ 還是正則的。因在 τ 平面上沿線段 $M'M$ 積分可化為依負方向沿圓周積分,故

$$N=-\frac{1}{2\pi i}\int_K d\ln\varphi(\tau),$$

這裏邊的 K 是圓周(6)但沿正的方向,也就是說,N 等於函數 $\varphi(\tau)=J(\tau)-c=\psi(z)$ 在圓

$$|z|\leqslant e^{-2\pi H}$$

內極點的個數,即 $N=1$。

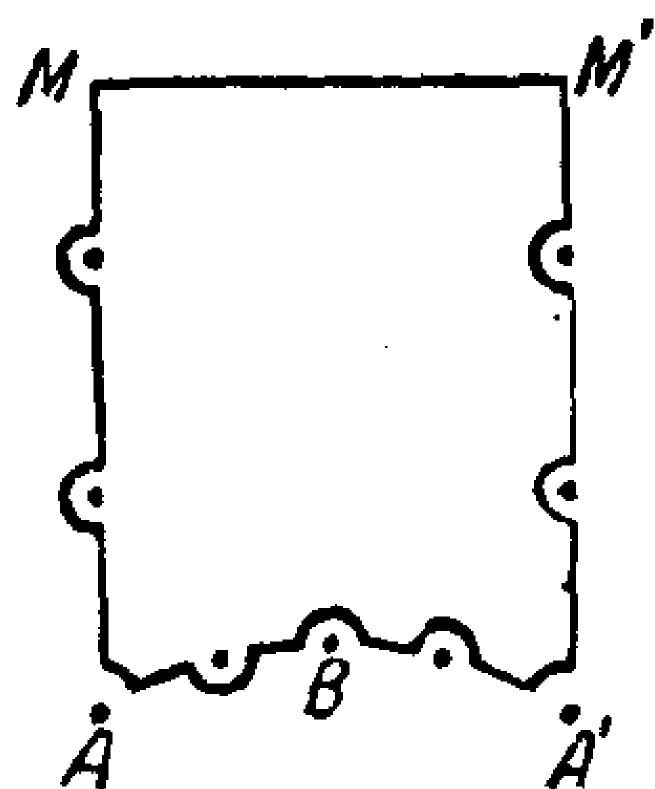


圖 6.

今再研究方程(5)在線 $MABA'M'$ 上有根的情形。這些根在每一情形內個數都是有限的,對於它們的每一個對應一個等價的、也就是關於虛軸對稱的根。圍繞這樣的每一個根,以及 A、B、A' 劃圓,命圓的半徑全是 ε, ε 小得使這些圓不能彼此相交。用這樣作的圓改變領域 D_H 如圖6所表明者,此後,每一

雙等價的根中有一個在虛軸左邊的根在境界內，但點 A、B、A' 則在境界的外邊。

將得出的積分 N 按所得的境界分爲若干部份，再應用關係 (α)，則不難證明

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{M'M}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_A}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_B}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_{A'}}d\ln\{J(\tau)-c\}。$$

其中 λ_A、λ_B、$\lambda_{A'}$ 表明以頂點 A、B、A' 作心的圓弧。若在這些點方程（5）沒有根，則在這些點處的圓弧可縮爲一點，因之有

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{M'M}d\ln\{J(\tau)-c\}。$$

這一積分，由上所證，等於 1。故本定理在我們考察的這一情形也眞。

最後餘下的祇是研究方程（5）在頂點處有根的情形。爲此，我們說明函數 $J(\tau)$ 在頂點處取何值。

在點 A 處，

$$\tau=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\equiv\rho。$$

但因 $$\rho^3=1,$$

故 $$\frac{g_2(1,\rho)}{60}=\sum{}'\frac{1}{(m+m'\rho)^4}=\frac{1}{\rho}\sum{}'\frac{1}{(m\rho^2+m')^4}。$$

在另一方面，由關係式

$$\rho^2+\rho+1=0,$$

下面的等式成立：

$$\sum{}'\frac{1}{(m\rho^2+m')^4}=\sum{}'\frac{1}{(m'-m-m\rho)^4}=\sum{}'\frac{1}{(n+n'\rho)^4}。$$

所以 $$\frac{g_2(1,\rho)}{60}=\frac{1}{\rho}\sum{}'\frac{1}{(n+n'\rho)^4}=\frac{1}{\rho}\,\frac{g_2(1,\rho)}{60}。$$

即 $$\left(1-\frac{1}{\rho}\right)g_2(1,\rho)=0,$$

由此 $$g_2(1,\rho)=0。$$

這樣就有 $$J(\rho)=0。$$

同樣可證明，在使 $\tau=-\frac{1}{\rho}=-\rho^2$ 的點 A' 處 $J(\tau)=0$，而在使 $\tau=i$ 的點 B 處 $J(\tau)=1$。

因此我們必須考察以下二方程：

(a) $$J(\tau)-1=0,$$

(b) $$J(\tau)=0。$$

在第一方程內我們可使弧 λ_A、$\lambda_{A'}$ 縮爲一點，也就是

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{M'M} d\ln\{J(\tau)-1\}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_B} d\ln\{J(\tau)-1\}。$$

若 $\bar{\lambda}_B$ 是 λ_B 的相補圓弧，則有

$$-\oint d\ln\{J(\tau)-1\}=\int_{\lambda_B}+\int_{\bar{\lambda}_B},$$

這裏左邊的積分路是沿正方向的。在積分 $\int_{\bar{\lambda}_B}$ 中命 $\tau=-\frac{1}{t}$，則得

$$\int_{\bar{\lambda}_B}=\int_{\lambda_B},$$

即 $$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{M'M} d\ln\{J(\tau)-1\}-\frac{1}{4\pi i}\oint d\ln\{J(\tau)-1\}。$$

右邊第一項等於1。命

$$\frac{1}{2\pi i}\oint d\ln\{J(\tau)-1\}=n,$$

這樣就有 $$N=1-\frac{n}{2}。$$

數 n 是方程(a)的根 $\tau=i$ 的級，但因 $\frac{n}{2}$ 是正整數，故 $n\geqslant 2$。在另一方面，$N\geqslant 0$，由此 $n\leqslant 2$。故 $n=2$，$N=0$。

我們可以看出，方程(a)在領域 D 內總共只有一根：$\tau=i$。這一根是二級的，但點 i 的隣域祇有一半屬於領域 D，也就是說，可

認爲祇有一單根 $\tau=i$ 屬於領域 D，而方程(a)在 $\tau=i$ 處的另外一根應屬於領域 D' 內，此 D' 與 D 有共同弧 ABA'。

可同樣處理方程(b)。它的根是點 $\tau=\rho$、$-\rho^2$，且每一根都是三級的。但這些點中屬於領域 D 的祇有第一個，即 A。聚於這一點處有六個領域：D 及其他五個領域，這五個領域都是 D 的等價領域。這六個領域各含有點 A 的全部鄰域的六分之一。由基本領域的定義，A 祇能屬於這幾個領域中的三個：領域 D 及其他二個領域。A 不屬於其餘的三個領域。同樣，點 A' 不屬於領域 D 內。故在點 A 處的三級根分屬於三個領域內，故可認爲方程(b)在 D 內有一個單根。

11．第一種橢圓積分的反形　在§§5及6內曾根據原始週期

(1)
$$2\omega,\ 2\omega'\quad\left(\Im\frac{\omega'}{\omega}>0\right),$$

作出衛爾斯脫拉斯函數 $\wp(u)$，且證明了它滿足下邊的微分方程：

$$\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3。$$

由這一方程得

$$u=\pm\int_{\wp}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}。$$

在積分學教程內讀者已知，具以下形狀的積分

$$\int R(t,\ w)dt,$$

(這裏邊 R 是它所含變數的有理函數，而 w^2 是 t 的沒有重根的三次或四次多項式) 叫做橢圓積分。上邊寫的積分叫作第一種橢圓積分。以後我們還要詳細述說橢圓積分。但這裏對我們重要的祇是：由已知週期(1)所作成的衛爾斯脫拉斯函數 $\wp(u)$ 是某個第一種橢圓積分的一個限，這個限是看成這個積分的值的函數。在根號下式子裏的數值 g_2、g_3 並不是任意給的，必須由週期(1)確定，且已知它應滿足

$$g_2^3-27g_3^2\neq 0。$$

很自然地發生下邊的問題：已知二數 a_2、a_3，它們滿足於

$$a_2^3-27a_3^2\neq 0,$$

考察積分

$$u=\pm\int_x^\infty\frac{dt}{\sqrt{4t^3-a_2t-a_3}}, \tag{2}$$

它的下限 x 是不是積分的值的橢圓函數?

這個問題可肯定地解答如下：

先確定這樣的兩個數 2ω、$2\omega'$ 使其滿足 $\Im\frac{\omega'}{\omega}>0$ 及

$$g_2(\omega,\ \omega')=a_2,\ \ g_3(\omega,\ \omega')=a_3。 \tag{3}$$

然後作出週期爲 2ω、$2\omega'$ 的函數 $\wp(v)$。最後，在積分(2)內，作變數變換

$$t=\wp(v)。$$

由方程 $$[\wp'(v)]^2=4[\wp(v)]^3-a_2\wp(v)-a_3,$$

得

$$u=\pm\int_0^w dv, \tag{4}$$

這裏 $x=\wp(w)$。由(4)得 $w=\pm u$。卽

$$x=\wp(u),$$

這就是我們所要求的結果。

我們可以看出，一切都建築在下邊問題的解決上：給了兩個數 a_2、a_3，使

$$a_2^3-27a_3^2\neq 0;$$

試求出兩個數 2ω、$2\omega'$ 使它們滿足(3)。這一問題的解根據前節立刻可得出。取方程

$$J(\tau)=\frac{a_2^3}{a_2^3-27a_3^2}。$$

它在基本領域，卽上半平面內具有解 τ。求出這個解後，用方程

$$\frac{1}{\omega^4} g_2(1, \tau) = a_2,$$

卽可決定 ω，而由方程

$$\frac{\omega'}{\omega} = \tau$$

決定 ω'。

第三章　衞爾斯脫拉斯函數

12．衞爾斯脫拉斯函數 $\zeta(u)$　這一函數用下面的公式界說：

(1)
$$\zeta(u)=\frac{1}{u}-\int_0^u\left\{\wp(u)-\frac{1}{u^2}\right\}du,$$

故

(2)
$$\zeta'(u)=-\wp(u)。$$

(1)裏邊的積分路除去 $u=0$ 外不經過週期網任何一個頂點。

在(1)裏邊取 $\wp(u)$ 的部份分式展開式替代 $\wp(u)$，就得出 $\zeta(u)$的表示式

(3)
$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+$$
$$+\sum_{m,m'}{}'\left\{\frac{1}{u-2m\omega-2m'\omega'}+\frac{1}{2m\omega+2m'\omega'}+\frac{u}{(2m\omega+2m'\omega')^2}\right\},$$

這示明：點
$$2m\omega+2m'\omega'$$
處的一級極點是函數 $\zeta(u)$ 的唯一的奇異點。由(1)可斷定 $\zeta(u)$ 是奇函數。事實上

$$\zeta(-u)=-\frac{1}{u}-\int_0^{-u}\left\{\wp(v)-\frac{1}{v^2}\right\}dv=$$
$$=-\frac{1}{u}+\int_0^{u}\left\{\wp(v)-\frac{1}{v^2}\right\}dv=-\zeta(u)。$$

在另一方面，由(2)得

(4)
$$\zeta(u+2\omega)=\zeta(u)+2\eta,$$
$$\zeta(u+2\omega')=\zeta(u)+2\eta',$$

其中 η 及 η' 是某二個常數。假定在這些等式中各命 $u=-\omega$、$u=-\omega'$ 且利用 $\zeta(u)$ 是奇函數，則得

$$\eta=\zeta(\omega),\quad \eta'=\zeta(\omega')。$$

通常應用符號 $\eta=\eta_1$、$\eta'=\eta_3$、$\omega=\omega_1$ 及 $\omega'=\omega_3$，因而

$$\eta_1=\zeta(\omega_1),\quad \eta_3=\zeta(\omega_3),$$

再導入以下常數

$$\eta_2=\zeta(\omega_2)=-\zeta(\omega+\omega')。$$

則不難看出 $$\eta_1+\eta_2+\eta_3=0。$$

事實上，由(4)

$$\zeta(u+2\omega+2\omega')=\zeta(u+2\omega')+2\eta=\zeta(u)+2\eta+2\eta'。$$

由此，設 $u=-\omega-\omega'$，則得

$$\eta+\eta'=\zeta(\omega+\omega'),$$

卽 $$\eta_1+\eta_3=-\eta_2。$$

現今想證明一個很重要的關係式，

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{\pi i}{2} \tag{5}$$

它當 ω、ω' 滿足於條件 $\Im\dfrac{\omega'}{\omega}>0$ 時成立。要想得關係式(5)，取任意週期平行四邊形，使點 $u=0$ 是這平行四邊形的內點。命這一平行四邊形的頂點是 c、$c+2\omega$、$c+2\omega+2\omega'$、$c+2\omega'$ 沿平行四邊形的境界積分 $\zeta(u)$，得

$$2\pi i=\int_c^{c+2\omega}+\int_{c+2\omega}^{c+2\omega+2\omega'}+\int_{c+2\omega+2\omega'}^{c+2\omega'}+\int_{c+2\omega'}^{c}\zeta(u)du,$$

在右邊的第二個積分中作變換 $u=2\omega+v$，而在第三個積分中作變換 $u=2\omega'+v$，則有

$$2\pi i=\int_c^{c+2\omega}\{\zeta(u)-\zeta(u+2\omega')\}du+$$

$$+\int_c^{c+2\omega'}\{\zeta(u+2\omega)-\zeta(u)\}du=$$

$$=\int_c^{c+2\omega'}2\eta\,du-\int_c^{c+2\omega}2\eta'\,du=4(\eta\omega'-\eta'\omega)。$$

這樣就證明了關係式(5)。以後我們還有機會談到它。它可改寫爲下列形式:

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{\pi i}{2}。$$

由這一關係式用循環變換還可得出下邊的兩個關係式:

$$\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2=\frac{\pi i}{2}, \quad \eta_3\omega_2-\eta_2\omega_3=\frac{\pi i}{2}。$$

13. 衞爾斯脫拉斯函數 $\sigma(u)$　函數 $\sigma(u)$ 用下邊的等式界說:

(1) $$\ln\frac{\sigma(u)}{u}=\int_0^u\left\{\zeta(u)-\frac{1}{u}\right\}du,$$

這裏的積分路除去 $u=0$ 外不經過週期網的任何一個頂點。由(1)得

(2) $$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\zeta(u)。$$

在(1)裏邊,代 $\zeta(u)$ 以其部份分式展開式,再逐項積分就得

$$\ln\frac{\sigma(u)}{u}=\sum_{m,m'}{}'\left\{\ln\left(1-\frac{u}{2m\omega+2m'\omega'}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{u}{2m\omega+2m'\omega'}+\frac{u^2}{2(2m\omega+2m'\omega')^2}\right\}。$$

由此函數 $\sigma(u)$ 可展成下邊的無窮乘積:

(3) $$\sigma(u)=u\prod{}'\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{u^2}{2s^2}}\quad(s=2m\omega+2m'\omega')。$$

我們看出,$\sigma(u)$ 是超越整函數,它祇具有一級的零點,這些零點全在週期網的頂點。

由(1)或(3)立刻知道,$\sigma(u)$ 是奇函數。

在(2)內用 $u+2\omega$ 代替 u。根據§12裏邊的公式(4),得

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}+2\eta。$$

故 $$\ln\sigma(u+2\omega)=\ln\sigma(u)+2\eta u+C,$$

就是 $$\sigma(u+2\omega)=C'e^{2\eta u}\sigma(u)。$$

這裏如假定 $u=-\omega$,則將有

$$\sigma(\omega)=-\sigma(\omega)C'e^{-2\eta\omega}。$$

但因 $\sigma(\omega)\neq 0$, 故

$$C'=-e^{2\eta\omega},$$

故

$$\sigma(u+2\omega)=-e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)。$$

容易看出,一般地有

$$(4)\qquad \sigma(u+2\omega_\alpha)=-e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma(u)\quad(\alpha=1,2,3)。$$

14. 用函數 $\sigma(u)$ 或用函數 $\zeta(u)$ 表示任意的橢圓函數　衆所週知,每一有理函數 $R(z)$ 可以有下邊的兩種表示法:

$$(\alpha)\qquad R(z)=C\frac{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)},$$

$$(\beta)\qquad R(z)=E(z)+\sum_{i,k}\frac{A_k^{(i)}}{(z-a_k)^i},$$

其中 C、b_i、a_k、$A_k^{(i)}$ 是常數,而 $E(z)$ 是多項式,我們把 $E(z)$ 叫做 $R(z)$ 的整式部份。這兩種表示法中的每一種都對於函數 $R(z)$ 有一定的描述:由第一種表示可以看出,函數 $R(z)$ 的零點和極點是什麼,而第二種表示法常用於積分學,給出了 $R(z)$ 在它的每一極點處的主要部份。

現在我們將證明,任意的橢圓函數也都可有類似的表示法。

假設已知週期是 2ω、$2\omega'$ 的橢圓函數 $f(u)$。取任意的一個週期平行四邊形,且假定 $f(u)$ 在這一平行四邊形內有極點 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 與零點 b_1, b_2, $\cdots$, b_n。同時,這每一個零點與極點是幾級的就算做幾個。這樣就有(參閱 § 4),

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\equiv b_1+b_2+\cdots+b_n\quad(\mathrm{mod.}\ 2\omega,\ 2\omega')$$

設

$$b_1=b_1^*+2m\omega+2m'\omega',$$

這裏挑選整數 m、m', 滿足於

$$(1)\qquad a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1^*+b_2+\cdots+b_n。$$

現今 b_1^*, 一般地來說,不在被考察的週期平行四邊形內。但是無妨將零點組

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$$

換成與它等價的組

$$b_1^*,\ b_2,\ \cdots,\ b_n。$$

今作出函數

$$g(u)=\frac{\sigma(u-b_1^*)\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)}。$$

這一函數與函數 $f(u)$ 有相同的零點和相同的極點(而且它們的級也相同)。但在另一方面,由於函數 $\sigma(u)$ 的性質及關係式(1)有

$$g(u+2\omega_\alpha)=e^{2\eta_\alpha(a_1+a_2+\cdots+a_n-b_1^*-b_2-\cdots-b_n)}g(u)=g(u),$$

故 $g(u)$ 是一個橢圓函數,且與 $f(u)$ 有相同的週期。關係式

$$(2)\qquad \frac{f(u)}{g(u)}$$

沒有極點,蓋因分子的每個極點都是分母的同級極點,而分母的每個零點都是分子的同級零點。但比(2)是一個橢圓函數。故這個比等於常數,而得出函數 $f(u)$ 的第一種表示法:

$$f(u)=C\frac{\sigma(u-b_1^*)\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)},$$

這裏 $\qquad b_1^*+b_2+\cdots+b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n。$

這種表示法和(α)相似。

現在來談橢圓函數的第二表示法。假設已知函數 $f(u)$ 在任一基本平行四邊形內的極點①

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,$$

與函數 $f(u)$ 的對應的主要部份。命相當於極點 a_k 的主要部份有以下的形狀

$$\frac{A_k}{u-a_k}+\sum_{r=2}^{m_k}(-1)^r\frac{(r-1)!\,A_k^{(r-1)}}{(u-a_k)^r}。$$

我們容易看出,下邊的函數在 a_k 處也有相同的主要部份:

$$A_k\zeta(u-a_k)+\sum_{r=2}^{m_k}A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k)。$$

① 這裏每個極點不論它是多少級祇算作一個極點。

對於其他極點也作出這樣的式子再把它們加起來就得到函數

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\zeta(u-a_k)+\sum_{k,r} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k)。$$

上邊的和的第二部份是橢圓函數。我們將證明，和的第一部份也是橢圓函數。事實上，命

$$\varphi(u)=\sum_{k=1}^{n} A_k\zeta(u-a_k)。$$

則
$$\varphi(u+2\omega_\alpha)=\sum_{k=1}^{n} A_k 2\eta_\alpha+\varphi(u)=2\eta_\alpha\sum_{k=1}^{n} A_k+\varphi(u)。$$

但 A_k 是我們橢圓函數關於極點 a_k 的留數。因在週期平行四邊形內所有極點的留數的和是零，故

$$\varphi(u+2\omega_\alpha)=\varphi(u),$$

故 $\varphi(u)$ 是橢圓函數。

差

$$f(u)-\sum_{k=1}^{n} A_k\zeta(u-a_k)-\sum_{k,r} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k)$$

在考察的週期平行四邊形內沒有異點，且因是一個橢圓函數，故必爲一常數。故得出 $f(u)$ 的第二表示法：

$$f(u)=C+\sum_{k=1}^{n} A_k\zeta(u-a_k)+\sum_{k,r} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k);$$

它與(β)類似，故可叫做 $f(u)$ 的部份分式展開式。

15. 衛爾斯脫拉斯函數的加法定理　注意函數

$$\wp(u)-\wp(v),$$

其中 v 是常量(當然，關於用週期 2ω、$2\omega'$ 作模不與零等餘)。這一函數在點 $u=0$ 處有二級的極點，且在點 $u=v$、$u=-v$ 處有一級的零點。容易看出來，用前節的定理顯然可寫出

$$a_1=a_2=0,\ b_1^*=v,\ b_2=-v。$$

這樣，我們得出表示式

$$\wp(u)-\wp(v)=C\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{[\sigma(u)]^2},$$

這裏C是常數。想要確定這一常數，可用u^2乘這一關係式的兩邊再命$u=0$。這給出

$$1=-C[\sigma(v)]^2。$$

故
$$C=-\frac{1}{[\sigma(v)]^2}$$

所以有

(1)
$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{[\sigma(u)]^2[\sigma(v)]^2}。$$

在這一等式中以ω_α代替v ($\alpha=1、2、3$)，且回想起

$$\wp(\omega_\alpha)=e_\alpha。$$

因
$$\sigma(u+\omega_\alpha)=\sigma(u-\omega_\alpha+2\omega_\alpha)=-e^{2\eta_\alpha u}\sigma(u-\omega_\alpha),$$

所以我們得出下邊的等式：

$$\wp(u)-e_\alpha=e^{2\eta_\alpha u}\left[\frac{\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)\sigma(u)}\right]^2 \quad (\alpha=1、2、3)。$$

除去$\sigma(u)$外，我們還導入三個西葛瑪函數：

(2)
$$\sigma_\alpha(u)=-\frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)} \quad (\alpha=1、2、3)。$$

這裏我們取負號，爲的是使下邊的等式成立：

$$\sigma_\alpha(0)=1。$$

這樣就有

$$\wp(u)-e_\alpha=\left[\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)}\right]^2 \quad (\alpha=1、2、3)。$$

我們看出，$\wp(u)-e_\alpha$的平方根是單值函數。假定在點$u=0$的鄰近使這個根常趨於$+\frac{1}{u}$。這時有

(3)
$$\sqrt{\wp(u)-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)} \quad (\alpha=1、2、3)。$$

西葛瑪函數也能直接表示$\wp'(u)$。爲的要求出這樣的式子，取關係式

$$\wp'^2=4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3)。$$

由此得出下式

$$[\wp'(u)]^2=4\,\frac{[\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)]^2}{[\sigma(u)]^6}。$$

求出它的平方根，再注意

$$\lim_{u\to 0} u^3\wp'(u)=-2。$$

就可得

$$\wp'(u)=-2\,\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{[\sigma(u)]^3}。\tag{4}$$

再轉到關係式（1）。兩邊求對數的導數，得出下邊的等式：

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}=\zeta(u-v)+\zeta(u+v)-2\zeta(u)。\tag{5_1}$$

這是左邊的部份分式展開式。它也可直接由 §14 的一般定理得出。

將(5_1)裏邊的 u 及 v 掉換

$$-\frac{\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}=-\zeta(u-v)+\zeta(u+v)-2\zeta(v)。\tag{5_2}$$

今將(5_1)，(5_2)相加，得

$$\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}=2\zeta(u+v)-2\zeta(u)-2\zeta(v)。$$

故

$$\zeta(u+v)=\zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}。\tag{6}$$

所得的等式將二個變數的和的且他（дзета—ζ）函數用每個變數的函數表示出來。我們說：（6）表出且他函數的加法定理。

為要得出函數 $\wp$ 的加法定理，將（6）關於 u 微分之，與關於 v 微分之，得

$$-\wp(u+v)=-\wp(u)+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\wp''(u)[\wp(u)-\wp(v)]-\wp'(u)[\wp'(u)-\wp'(v)]}{[\wp(u)-\wp(v)]^2},$$

$$-\wp(u+v)=-\wp(v)-$$

$$-\frac{1}{2}\ \frac{\wp''(v)[\wp(u)-\wp(v)]-\wp'(v)[\wp'(u)-\wp'(v)]}{[\wp(u)-\wp(v)]^2}。$$

把這兩個等式邊邊相加，得：

$$(7)\qquad -2\wp(u+v)=-\wp(u)-\wp(v)+$$

$$+\frac{1}{2}\ \frac{[\wp''(u)-\wp''(v)][\wp(u)-\wp(v)]-[\wp'(u)-\wp'(v)]^2}{[\wp(u)-\wp(v)]^2}。$$

因由函數 $\wp$ 的微分方程

$$2\wp''=12\wp^2-g_2,$$

故
$$\wp''(u)-\wp''(v)=6\,[\wp^2(u)-\wp^2(v)]。$$

應用這一恆等式，不難將（7）化爲以下的形式：

$$(8)\qquad \wp(u+v)+\wp(u)+\wp(v)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2,$$

這就是函數 $\wp$ 的加法定理。

16. 用函數 $\wp$ 及 $\wp'$ 表示各橢圓函數 在§14裏邊已證明，任意的橢圓函數 $f(u)$ 可有部份分式的展開式：

$$f(u)=C+\sum_{k=1}^{n}A_k\zeta(u-a_k)+\sum_{k,r}A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k),$$

同時有

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}A_k=0。$$

現在用函數 ζ 及 $\wp$ 的加法定理；此外再注意，$\wp$ 的任意導數是 $\wp$ 及 $\wp'$ 的有理式。

首先，由 ζ 的加法定理，

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n}A_k\zeta(u-a_k)=\sum_{k=1}^{n}A_k\zeta(u)+R_1(\wp,\wp')=R_1(\wp,\wp'),$$

其中 R_1 和以後遇見的 R_2、R_3、… 類似，表明它所包含變數的有理函數。建立（2）時利用到（1）。

根據函數 $\wp$ 的加法定理，得

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}\wp(u-a_k)=R_2(\wp,\ \wp'),$$

其次
$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)}\wp'(u-a_k)=R_3(\wp,\ \wp')$$

等等。

由所有這些等式，有

$$f(u)=R(\wp,\wp')。$$

這樣，每一個橢圓函數均可用 $\wp$ 及 $\wp'$ 的有理函數表示出來。

這一表示式可寫成以下的形狀：

(3)
$$f(u)=R_1(\wp)+R_2(\wp)\wp'。$$

這裏所代表的祇是 $\wp$ 的有理函數。事實上，由函數 $\wp$ 的微分方程，知道導數 $\wp'$ 的每一整數乘冪可用具 $A+B\wp'$ 形狀的式子表示出來，其中 A 及 B 是 $\wp$ 的多項式。故 $\wp$ 及 $\wp'$ 的有理函數可用下邊的式子表示出來：

$$R(\wp,\ \wp')=\frac{M_1+N_1\wp'}{M+N\wp'},$$

其中 M_1、N_1, M, N 是 $\wp$ 的多項式。用 $M-N\wp'$ 乘這一式的分子及分母，得

$$R(\wp,\ \wp')=\frac{M_2+N_2\wp'}{M^2-N^2\wp'^2}。$$

現今分母祇是 $\wp$ 的多項式。卽

$$R(\wp,\ \wp')=R_1(\wp)+R_2(\wp)\wp',$$

這就是我們要證明的。

我們還應注意，偶橢圓函數可用下邊的形式表示出來，

$$f(u)=R(\wp),$$

而奇橢圓函數則可用形式

$$f(u)=R(\wp)\wp'$$

表示出來。爲了證明它，取下列表示式

$$f(u)=R_1(\wp)+R_2(\wp)\wp'(u),$$

且以 $-u$ 代替 u。這樣得

$$f(-u)=R_1(\wp)-R_2(\wp)\wp'(u),$$

因 $\wp(u)$ 是偶函數，而 $\wp'(u)$ 是奇函數。若 $f(u)=f(-u)$ 則將上二式相加，若 $f(u)=-f(-u)$ 則由第一式減去最後一式。

由(3)可得出橢圓函數許多的一般性質。

一個最重要的性質是：任何兩個橢圓函數若有相同的週期，則這二函數之間有一代數關係式聯繫。

命 $f(u)$ 及 $g(u)$ 是這樣的兩個函數。這時有

$$(4_1)\qquad f(u)=R_1(\wp)+R_2(\wp)\wp',$$

$$(4_2)\qquad g(u)=R_3(\wp)+R_4(\wp)\wp'。$$

在另一方面，

$$(5)\qquad \wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3。$$

由(4_1)、(4_2)及(5)可以消去 $\wp$ 及 $\wp'$。這樣就化成以下形狀的關係式：

$$F(f,\ g)=0,$$

其中 F 是 f 及 g 的多項式。

現在指出這個一般情形的兩個特例。先取 $g=f'$，其次取 $g(u)=f(u+v)$。這樣我們得出以下的事實：(a)每一橢圓函數滿足於以下形狀的一級微分方程

$$F(f,\ f')=0$$

其中 F 是關於 f、f' 的多項式；(b)每一橢圓函數具有代數的加法定理。

這樣的代數加法定理的例有 §15 內的公式(8)，因為右邊的導數 $\wp'(u)$、$\wp'(v)$ 各是 $\wp(u)$、$\wp(v)$ 的代數函數。相反的，§15 的公式(6)不是代數的加法定理，因函數 $\wp$ 和它的導數不是函數 ζ 的代數式。

17. 橢圓積分 以上在 §11 裏邊，我們已經討論過第一種橢

圓積分。一般具有以下形狀的積分叫做橢圓積分：

$$\int R(z,\ w)dz, \tag{1}$$

其中 $w^2=a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4\equiv f(z)$

還有附帶的條件，就是多項式 $f(z)$ 不能有重根。

幾何、解析及力學上的各種問題常可化爲積分（1）。最初這樣的問題之一是求橢圓的弧長。這一問題導出了術語——橢圓積分，橢圓函數。

取橢圓 $x=a\sin t,\quad y=b\cos t,$

且命 $c^2=a^2-b^2,\ \ \dfrac{c}{a}=k$。

對於弧長的微分有

$$ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t)dt^2=$$
$$=(a^2-c^2\sin^2 t)dt^2=a^2(1-k^2\sin^2 t)dt^2,$$

所以 $$s=a\int\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\ dt。$$

假定用公式 $$\xi=\sin t$$

導出 ξ 以代替 t，則想要求的弧長爲

$$s=a\int\sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}}\,d\xi$$

或 $$s=a\int\frac{1-k^2\xi^2}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}\,d\xi,$$

實際上，這是（1）的特例。

在 §7 內我們已經證明，藉助於適當的線性分式變換，可以把積分（1）裏邊的根式化成以下的形狀：

$$\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}。$$

命這個線性分式變換有下邊的形狀

$$z=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}。$$

這時有

$$\sqrt{a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4}=\frac{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}{(\gamma x+\delta)^2},$$

故

$$\int R(z,\ \sqrt{a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4})\,dz=$$

$$=\int R\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ \frac{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}{(\gamma x+\delta)^2}\right)\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2}\,dx。$$

在特殊情形有

$$\int\frac{dz}{\sqrt{a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4}}=(\alpha\delta-\beta\gamma)\int\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}。$$

這樣,我們可以討論下邊的積分以替代(1):

(2) $$\int R(z,\ \sqrt{4z^3-g_2z-g_3})\,dz,$$

其中的 R 還是表明它所包含的兩個變數的有理函數。

設導入相當於不變式 g_2、g_3 的函數 $\wp(u)$,且命 $z=\wp(u)$,則積分(2)變爲以下的形狀:

(3) $$\int R(\wp,\ -\wp')\wp'\,du=\int R_1(\wp,\ \wp')\,du,$$

卽,我們將得出橢圓函數的積分。變換 $z=\wp(u)$ 表明

(4) $$u=\int_z^\infty\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

且由(2)轉到(3)可以解釋爲想把一般的橢圓積分(2)看成對應的第一種橢圓積分(4)的函數。

想要求積分(3),最方便的是將橢圓函數 $R_1(\wp,\ \wp')$ 展成部份分式:

$$R_1(\wp,\ \wp')=C+\sum_{k=1}^{n}A_k\zeta(u-a_k)+\sum_{k,r}A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(u-a_k)。$$

兩邊積分得

$$\int R_1(\wp, \wp')\,du = C_1 + Cu + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln\sigma(u-a_k) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}\zeta(u-a_k) + \sum_{\substack{k,r\\(r>3)}} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-3)}(u-a_k)。$$

今注意函數 ζ 及 $\wp$ 的加法定理。由這些定理有

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}\zeta(u-a_k) = -A\zeta(u) + R_2(\wp, \wp'),$$

$$\sum_{\substack{k,r\\(r>3)}} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-3)}(u-a_k) = R_3(\wp, \wp'),$$

其中 A 是常數。

根據上述公式，

$$\int R_1(\wp, \wp')\,du = Cu + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln\sigma(u-a_k) + A\zeta(u) + R^*(\wp, \wp')。$$

因
$$\sum_{k=1}^{n} A_k = 0,$$

故這一公式更可寫成以下的形狀:

(5)
$$\int R_1(\wp, \wp')\,du =$$

$$= Cu + A\zeta(u) + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln\frac{\sigma(u-a_k)}{\sigma(u)} + R^*(\wp, \wp'),$$

右邊最後的一項是橢圓函數。最初三項非橢圓函數。

把變數 u 變回最初的變數 $z=\wp(u)$。這時公式(5)右邊的最後一項可寫成以下的形狀:

$$R^*(z, w),$$

其中
$$w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

這是積分(2)的代數部份。

至於超越部份，它可由下邊的元素構成:

$$u,\ \zeta(u),\ \ln\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)} + u\zeta(a)。$$

這些函數的第一個是

$$u=\int\frac{dz}{w},$$

第二個等於 $\zeta(u)=-\int\wp(u)du=-\int\frac{z\,dz}{w},$

而第三個是

$$\ln\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}+u\zeta(a)=\int\left\{\frac{\sigma'(u-a)}{\sigma(u-a)}-\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}+\zeta(a)\right\}du=$$

$$=\int\{\zeta(u-a)-\zeta(u)+\zeta(a)\}du=\frac{1}{2}\int\frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}du。$$

導入 $z=\wp(u)$, $w=\wp'(u)$, 命 $\wp(a)=z_0$, $\wp'(a)=w_0$。這時第三個函數變爲以下的形狀:

$$\frac{1}{2}\int\frac{w+w_0}{z-z_0}\cdot\frac{dz}{w}。$$

積分 $$u=\int\frac{dz}{w}$$

以前叫做第一種橢圓積分,現今把積分

$$\int\frac{z\,dz}{w}$$

叫做第二種標準橢圓積分,至於積分

$$\frac{1}{2}\int\frac{w+w_0}{z-z_0}\cdot\frac{dz}{w}$$

則叫做第三種標準橢圓積分。

這樣,全體的橢圓積分是由以上三種橢圓積分及 z 和 w 的某有理函數組成的。

藉助於以上所建立的橢圓函數理論而得到的這一結果也可以不依賴這個理論而得到,並且是關於導入橢圓積分與超橢圓積分的一般定理的特例,這種積分,就是具有以下形狀的積分:

$$\int R(z,\,Z)dz,$$

其中 Z^2 是 $n\geqslant 3$ 次的多項式,而 R 是有理函數。

第四章　西他函數

18. 西他函數的無窮乘積表示　在§3內曾用無窮級數界說西他函數。現今我們想把西他函數展成無窮乘積。

想要得出這些展開式,考察函數

$$f(s)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1}s)\prod_{h=1}^{\infty}(1-h^{2k-1}s^{-1}), \tag{1}$$

其中 h 是常數,它的模小於1,而 s 是複變數。上邊寫出的無窮乘積對於任意的 $s\neq 0$ 絕對收斂,且公式(1)所界說的函數 $f(s)$ 顯然在每一異於零的有限點 s 是正則的。其次,從(1)的右邊可以看出,$f(s)$ 滿足於下邊的函數方程:

$$f(s)=-hsf(h^2s), \tag{2}$$

函數 $f(s)$ 可以展成勞郎(Лоран)氏級數。假定這一展開式具有下邊的形狀:

$$f(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k s^k。 \tag{3}$$

注意(2),得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k s^k=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k h^{2k+1}s^{k+1},$$

故

$$a_k=-a_{k-1}h^{2k-1}。$$

這個關係式可寫成下邊的形狀:

$$(-1)^k a_k h^{-k^2}=(-1)^{k-1}a_{k-1}h^{-(k-1)^2}。$$

這樣,量

$$(-1)^k a_k h^{-k^2}$$

與 k 無關,這就是表明

$$(-1)^k a_k h^{-k^2}=a_0。$$

我們的展開式(3)就取下邊的形狀:

$$f(s)=a_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k h^{k^2}s^k;$$

故 $$f(e^{2\pi iv})=a_0\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k h^{k^2}\cos 2k\pi v\right\}。$$

大括弧裏邊的式子就是 $\vartheta_0(v)$，故

$$\vartheta_0(v)=\frac{1}{a_0}f(e^{2\pi iv}),$$

在另一方面，

$$f(e^{2\pi iv})=\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1}e^{2\pi iv})(1-h^{2k-1}e^{-2\pi iv})=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k-1}\cos 2\pi v+h^{4k-2})。$$

這樣，就有

$$\vartheta_0(v)=\frac{1}{a_0}\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k-1}\cos 2\pi v+h^{4k-2})。$$

我們已經得出 $\vartheta_0(v)$ 的無窮乘積展開式，但裏邊的數字因子 $\frac{1}{a_0}$ 還沒有確定。現在想把它求出來。爲要達到這目的，設

(4) $$f_n(s)=\prod_{k=1}^{n}(1-h^{2k-1}s)(1-h^{2k-1}s^{-1})。$$

把(4)的右邊實地乘出來，得

$$f_n(s)=a_0^{(n)}+a_1^{(n)}\left(s+\frac{1}{s}\right)+\cdots+a_n^{(n)}\left(s^n+\frac{1}{s^n}\right)。$$

同時

(5) $$a_n^{(n)}=(-1)^n h^{1+3+5+\cdots+(2n-1)}=(-1)^n h^{n^2},$$

在另一方面，由(4)，

$$(sh-h^{2n})f_n(h^2s)=-(1-h^{2n+1}s)f_n(s)。$$

故 $$(sh-h^{2n})\sum_{k=-n}^{n}a_k^{(n)}h^{2k}s^k=-(1-h^{2n+1}s)\sum_{k=-n}^{n}a_k^{(n)}s^k$$

或 $$\sum_{k=-n}^{n}a_k^{(n)}(h^{2k+1}-h^{2n+1})s^{k+1}=\sum_{k=-n}^{n}a_k^{(n)}(h^{2k+2n}-1)s^k。$$

比較兩邊的係數，得

$$a_k^{(n)}(h^{2k+1}-h^{2n+1})=a_{k+1}^{(n)}(h^{2(k+n+1)}-1)。$$

依次假定 $k=0, 1, 2, \cdots, (n-1)$，且把得出的等式乘起來，就有

$$(-1)^n a_0^{(n)} \prod_{k=1}^{n} (h^{2k-1}-h^{2n+1}) = a_n^{(n)} \prod_{k=1}^{n} (1-h^{2(n+k)})。$$

故由(5)，得

$$a_0^{(n)} = \frac{h^{n^2} \prod\limits_{k=1}^{n} (1-h^{2(n+k)})}{\prod\limits_{k=1}^{n} (h^{2k-1}-h^{2n+1})}$$

或

$$a_0^{(n)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1-h^{2(n+k)})}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1-h^{2k})}。$$

我們要求的量 a_0 等於

$$a_0 = \lim_{n\to\infty} a_0^{(n)}。$$

事實上，由確定勞郎氏級數的係數的公式得

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint f(s)\frac{ds}{s}, \quad a_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\oint f_n(s)\frac{ds}{s},$$

其中的積分路是單位圓的圓周，但在該圓周上當 $n\to\infty$ 時 $f_n(s)$ 均一趨近於 $f(s)$。由以上所得到的 $a_0^{(n)}$ 的表達式推出

$$a_0 = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1-h^{2k})}。$$

這樣，最後的公式就是以下的形式：

$$\vartheta_0(v) = H_0 \prod_{k=1}^{\infty} (1-h^{2k-1}e^{2\pi iv})(1-h^{2k-1}e^{-2\pi iv}) =$$

$$= H_0 \prod_{k=1}^{\infty} (1-2h^{2k-1}\cos 2\pi v + h^{4k-2}),$$

其中

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\infty} (1-h^{2k})。$$

由此我們不難得到其他西他函數類似的展開式。這些展開式全在 IX 表裏邊。茲取函數 $\vartheta_1(v)$ 的展開爲例。爲此目的，可應用下邊的等式：

$$\vartheta_1(v)=\frac{1}{i}h^{\frac{1}{4}}e^{\pi iv}\vartheta_0\left(v+\frac{\tau}{2}\right)。$$

由這一等式得

$$\vartheta_1(v)=\frac{1}{i}H_0h^{\frac{1}{4}}e^{\pi iv}\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k}e^{2\pi iv})(1-h^{2k-2}e^{-2\pi iv})=$$

$$=\frac{1}{i}H_0h^{\frac{1}{4}}e^{\pi iv}(1-e^{-2\pi iv})\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k}e^{2\pi iv})(1-h^{2k}e^{-2\pi iv})=$$

$$=2H_0h^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k}\cos 2\pi v+h^{4k})。$$

如有西他函數的無窮乘積展開,就不難將它的全部零點的集合寫出來,且可得出這些函數的零值,特別可證明

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0),$$

這式也在表 IX 內。

19. 西葛瑪函數與西他函數的關係 今比較函數 $\sigma(u)$ 與函數 $\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)$。這些函數的零點都是一級的,且是下邊的形狀:

$$u=2m\omega+2m'\omega'\quad(m、m'=0、\pm1、\pm2、\cdots)。$$

考察下邊的式子:

$$f(u)=\frac{e^{\alpha u^2}\sigma(u)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}。$$

這是在有限的距離內沒有奇異點的函數,因爲分母和分子有相同的零點,且每零點的級也相同。

先求 $f(u+2\omega)$ 及 $f(u+2\omega')$:

$$f(u+2\omega)=e^{\alpha(u+2\omega)^2}\frac{\sigma(u+2\omega)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}+1\right)}=$$

$$=e^{\alpha u^2}e^{4\omega\alpha(u+\omega)}e^{2\eta(u+\omega)}\frac{\sigma(u)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}=e^{2(2\omega\alpha+\eta)(u+\omega)}f(u),$$

$$f(u+2\omega')=e^{\alpha(u+2\omega')^2}\frac{\sigma(u+2\omega')}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}+\tau\right)}=$$

$$=e^{\alpha u^2}e^{4\alpha\omega'(u+\omega')}\frac{e^{2\eta'(u+\omega')}}{h^{-1}e^{-\frac{2\pi iu}{2\omega}}}\frac{\sigma(u)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}=e^{\left\{2(2\omega'\alpha+\eta')+\frac{\pi i}{\omega}\right\}(u+\omega')}f(u)。$$

注意到等式 $$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{\pi i}{2},$$

這樣得 $$2(2\omega'\alpha+\eta')+\frac{\pi i}{\omega}=2\tau(2\omega\alpha+\eta)。$$

假定我們命 $$\alpha=-\frac{\eta}{2\omega},$$

則上邊寫出的等式變爲下邊的形狀:

$$f(u+2\omega)=f(u),\quad f(u+2\omega')=f(u)。$$

但因 $f(u)$ 是整函數,故適當選擇 α 時可使 $f(u)$ 成爲常數。故

$$\sigma(u)=Ce^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)。$$

要想確定常數 C, 可先將兩邊微分,再命 $u=0$。這樣得

$$1=C\cdot\frac{1}{2\omega}\vartheta_1'(0),$$

故 $$C=\frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)}$$

因此有

$$\sigma(u)=\frac{2\omega e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_1'(0)}。\tag{1}$$

同樣可得出其他的西他函數和西葛瑪函數的類似的關係式(這些關係式寫在表 X 裏邊)。

由關係式(1)可以知道,任意的橢圓函數如果知道它的零點和極點,則亦可用西他函數表示出來以替代用西葛瑪函數的表示。

假定 $f(u)$ 是一個橢圓函數,且在基本平行四邊形內

$$a_1、a_2、\cdots、a_n$$

是它的極點,及

$$b_1、b_2、\cdots、b_n$$

是它的零點,其次設

$$(2)\qquad a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1^*+b_2+\cdots+b_n。$$

前邊已經得出

$$f(u)=C_1\frac{\sigma(u-b_1^*)\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)},$$

其中 C_1 是常數。

現今得到下邊的表示式:

$$f(u)=C_1e^{\frac{\eta}{2\omega}\left\{\left(u-b_1^*\right)^2+\cdots+(u-b_n)^2-(u-a_1)^2-\cdots-(u-a_n)^2\right\}}\times$$

$$\times\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-b_1^*}{2\omega}\right)\cdots\vartheta_1\left(\frac{u-b_n}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-a_1}{2\omega}\right)\cdots\vartheta_1\left(\frac{u-a_n}{2\omega}\right)}。$$

在式

$$(u-b_1^*)^2+\cdots+(u-b_n)^2-(u-a_1)^2-\cdots-(u-a_n)^2$$

裏邊,所有 u^2 的項顯然彼此相消。由(2)知道包含 u 的一次乘冪的項也相消。這樣就有

$$f(u)=C\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-b_1^*}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{u-b_2}{2\omega}\right)\cdots\vartheta_1\left(\frac{u-b_n}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-a_1}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{u-a_2}{2\omega}\right)\cdots\vartheta_1\left(\frac{u-a_n}{2\omega}\right)}。$$

20. 函數 $\zeta(u)$ 及 $\wp(u)$ 的單級數展開式 今再轉到公式

$$\sigma(u)=2\omega e^{2\eta\omega v^2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)},$$

其中 $v=\frac{u}{2\omega}$。兩邊取關於 u 的對數的導數,得

$$\zeta(u)=\frac{\eta}{\omega}u+\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}。$$

現今用函數 $\vartheta_1(v)$ 的無窮乘積的展開式代替 $\vartheta_1(v)$，則得到下邊關於函數 $\zeta(u)$ 的展開式：

$$(1)\quad \zeta(u)=\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{ctg}\pi v+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4h^{2k}\sin 2\pi v}{1-2h^{2k}\cos 2\pi v+h^{4k}}\right\}。$$

這裏我們得出 $\zeta(u)$ 用單無窮級數的表示法而非前邊用以界說函數 $\zeta(u)$ 的二重級數。我們得到的這一級數還可用下邊的形狀表示出來，這對於許多目的來說，都是比較簡便的：

$$(2)\quad \zeta(u)=\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi i}{2\omega}\left\{\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2h^{2k}z^{-2}}{1-h^{2k}z^{-2}}-\frac{2h^{2k}z^{2}}{1-h^{2k}z^{2}}\right)\right\},$$

其中

$$z=e^{\frac{\pi iu}{2\omega}}。$$

為要得出函數 $\wp(u)$ 的類似展開式，兩邊對於 u 微分。這樣得

$$(3)\quad \wp(u)=-\frac{\eta}{\omega}-$$

$$-\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{(z-z^{-1})^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{h^{2k}z^{-2}}{(1-h^{2k}z^{-2})^2}+\frac{h^{2k}z^{2}}{(1-h^{2k}z^{2})^2}\right]\right\}。$$

為要把 η、e_1、e_2、e_3 用 h 表示出來，可應用已得出的級數。在（3）內假定 $u=\omega$，卽 $z=i$，因此得

$$e_1=-\frac{\eta}{\omega}+\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}}{(1+h^{2k})^2}\right\}。$$

同樣，假定 $u=\omega'$，卽 $z=h^{\frac{1}{2}}$，因此得

$$e_3=-\frac{\eta}{\omega}-2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k-1}}{(1-h^{2k-1})^2}。$$

最後，假定 $u=-\omega-\omega'$，卽 $z=-ih^{-\frac{1}{2}}$，因此得

$$e_2=-\frac{\eta}{\omega}+2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k-1}}{(1+h^{2k-1})^2}。$$

將上邊得到的等式逐項的加起來，再注意到等式：

$$e_1+e_2+e_3=0,$$

則經過簡單的計算後得

$$\eta\omega=\frac{\pi^2}{12}\left\{1-24\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}}{(1-h^{2k})^2}\right\}。$$

21．量 e_1、e_2、e_3 用西他函數零值的表示式 回想起公式

$$\sqrt{\wp(u)-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)}\quad(\alpha=1、2、3)。$$

這裏假定 $u=\omega_\beta$，則得

$$\sqrt{e_\beta-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\beta)}。$$

玆將上式的右邊用西他函數表示出來。例如，命 $\beta=1$，$\alpha=2$ 則得

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_0(0)\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}=\frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_0\vartheta_1'}{\vartheta_2\vartheta_3}。$$

在這裏以及以後各處，ϑ_0、ϑ_2、ϑ_3、ϑ_1' 都分別表明函數 $\vartheta_0(v)$、$\vartheta_2(v)$、$\vartheta_3(v)$、$\vartheta_1'(v)$ 在點 $v=0$ 處的值。但因（參看表 IX）

$$\vartheta_1'=\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3,$$

故

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_0^2。$$

同樣可求得，

$$\sqrt{e_2-e_1}=i\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_0^2$$

及

$$\sqrt{e_2-e_3}=-i\sqrt{e_3-e_2}=-\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2,$$

$$\sqrt{e_3-e_1}=-i\sqrt{e_1-e_3}=-i\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2。$$

由所寫出的公式推出

$$e_1-e_2=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_0^4,$$

$$e_2-e_3=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_2^4,$$

$$e_1-e_3=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_3^4。$$

由此得到下面的重要關係式：

$$\vartheta_3^4=\vartheta_0^4+\vartheta_2^4。$$

22. 西他函數的變換　直到現在,考察西他函數時,祇研究它和變數 v 的相關而並沒有注意它和參數 τ (或與 $h=e^{\pi i\tau}$) 的相關。當研究它與 v 的相關時,順便考察當變數 v 加上一個週期或半個週期時,西他函數怎樣變化。

現在就來研究西他函數和參數 τ 的相關。這裏代替平移羣(平移週期或半週期)出現的是全體變換

$$\tau^*=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},$$

所成的模變換羣 Σ,其中 α、β、γ、δ 是整數,且滿足關係式:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1。$$

由前邊(參看§9)知道,羣 Σ 是由下邊的兩個基本變換產生的:

$$S=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}。$$

故祇要研究當 τ 受這兩個基本變換時西他函數怎樣變換就夠了。

把 τ 變成 $\tau+1$ 就是用 $-h$ 代替 h,變換後相當的公式很簡單地根據西他函數的無窮級數展開就可得出來。這些公式具下邊的形狀:

$$(1)\qquad\begin{cases}\vartheta_1(v\,|\,\tau+1)=i^{\frac{1}{2}}\vartheta_1(v\,|\,\tau),\\ \vartheta_2(v\,|\,\tau+1)=i^{\frac{1}{2}}\vartheta_2(v\,|\,\tau),\\ \vartheta_3(v\,|\,\tau+1)=\vartheta_0(v\,|\,\tau),\\ \vartheta_0(v\,|\,\tau+1)=\vartheta_3(v\,|\,\tau),\end{cases}$$

且

$$i^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{\pi}{4}i}。$$

現今研究 τ 變成 $-\frac{1}{\tau}$,爲方便起見並引用記號

$$\tau'=-\frac{1}{\tau}。$$

取函數
$$f(v)=e^{\pi i\tau' v^2}\frac{\vartheta_3(\tau' v\,|\,\tau')}{\vartheta_3(v\,|\,\tau)}。$$

不難檢驗出這一函數沒有奇異點。事實上,它的分母的零點(且都是一級的)只是

$$(2)\qquad v=\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

其中 m、n 是整數。同時這些點也是分子的零點,因爲當

$$\tau' v=\left(m'+\frac{1}{2}\right)\tau'+\left(n'+\frac{1}{2}\right)$$

時(m'、n' 是整數),就是當

$$v=\left(m'+\frac{1}{2}\right)-\left(n'+\frac{1}{2}\right)\tau$$

時分子變爲零。假定

$$m'=n,\quad n'=-m-1,$$

則這一式就成了(2)的形狀。這樣 $f(v)$ 就是一個超越整函數。但容易驗證:$f(v)$ 是一個橢圓函數。故 $f(v)$ 是一個常數,就是

$$(3)\qquad \vartheta_3(\tau' v\,|\,\tau')=Ae^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_3(v\,|\,\tau)。$$

這裏再用 $v+\frac{1}{2}$、$v-\frac{\tau}{2}$、$v+\frac{1-\tau}{2}$ 分別代替 v,且引用 §3 裏邊的關係,則得出下邊的公式:

$$(3') \qquad \begin{cases} \vartheta_2(\tau' v\,|\,\tau')=Ae^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_0(v\,|\,\tau), \\ \vartheta_0(\tau' v\,|\,\tau')=Ae^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_2(v\,|\,\tau), \\ \vartheta_1(\tau' v\,|\,\tau')=iAe^{-\pi i\tau' v^2}\vartheta_1(v\,|\,\tau), \end{cases}$$

因而一切都化爲求常數 A 了。要想達到這一目的,寫出這些公式當 $v=0$ 時的情形,求出最後一式關於 v 的一級導數,則得

$$\vartheta_3(0\,|\,\tau')=A\vartheta_3(0\,|\,\tau),$$
$$\vartheta_2(0\,|\,\tau')=A\vartheta_0(0\,|\,\tau),$$
$$\vartheta_0(0\,|\,\tau')=A\vartheta_2(0\,|\,\tau),$$
$$\tau'\vartheta_1'(0\,|\,\tau')=iA\vartheta_1'(0\,|\,\tau)。$$

今再注意(參看表 IX)

$$\vartheta_1'=\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3。$$

由這一關係式得

$$\tau'\pi\vartheta_0(0|\tau')\vartheta_2(0|\tau')\vartheta_3(0|\tau')=iA\pi\vartheta_0(0|\tau)\vartheta_2(0|\tau)\vartheta_3(0|\tau),$$

故
$$A^2\tau'=i,$$

因此有
$$A^2=-i\tau,$$

故

$$A=\pm\sqrt{-i\tau}, \tag{3''}$$

其中根號下應取使它的實數部爲正的值。

現今想確定公式(3″)裏邊的號，即在等式

$$\vartheta_3(0|\tau')=\pm\sqrt{-i\tau}\,\vartheta_3(0|\tau) \tag{4}$$

裏邊的號。下邊的兩個量

$$\vartheta_3(0|\tau'),\quad \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_3(0|\tau) \tag{5}$$

當 τ 在上半平面時是正則函數。假定 τ 是純虛數，則 $h=e^{\pi i\tau}$ 及 $h'=e^{\pi i\tau'}$ 是正數，故由函數 $\vartheta_3(v)$ 藉助於三角級數的定義知道量(5)也是正數。故假定 τ 在半虛軸上時，我們可以看出來，(4)裏邊應該取正號，這就表明在上半平面內的任一點 τ，都應當取正號(因爲是正則函數)。這樣，公式(3)就取下邊的形狀：

$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(\tau'v|\tau')=\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\tau'v^2}\vartheta_3(v|\tau),\\
&\vartheta_2(\tau'v|\tau')=\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\tau'v^2}\vartheta_0(v|\tau),\\
&\vartheta_0(\tau'v|\tau')=\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\tau'v^2}\vartheta_2(v|\tau),\\
&\vartheta_1(\tau'v|\tau')=i\sqrt{-i\tau}\,e^{-\pi i\tau'v^2}\vartheta_1(v|\tau)。
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

西他函數的零值與用它們表出的各種量，都僅是 τ 的函數。在這些函數裏邊一個重要的函數是

$$\lambda=\frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}\equiv\lambda(\tau)。$$

根據公式(1)，

$$\lambda(\tau+1)=-\frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_0^4(0|\tau)}。$$

但由前節有

$$\vartheta_0^4(0|\tau)=\vartheta_3^4(0|\tau)-\vartheta_2^4(0|\tau),$$

故

$$\lambda(\tau+1)=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda(\tau)}},$$

或

$$\lambda(\tau+1)=\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}。\tag{7}$$

同樣，由公式(6)，有

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{\vartheta_0^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}。$$

故

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=1-\lambda(\tau)。\tag{8}$$

公式(7)及(8)表明，$\lambda(\tau)$ 關於模變換羣並非不變。但可示明，從整個模羣 Σ 裏邊可以取出某一子羣（用 Σ_2 代表它）使函數 $\lambda(\tau)$ 關於它是不變的。故 $\lambda(\tau)$ 也叫做模函數。

模羣裏邊的任一變換都可用下邊二個基本變換的結合表示出來：

$$S:\qquad \tau^*=\tau+1;$$

$$T:\qquad \tau'=-\frac{1}{\tau}。$$

這些情況和(7)及(8)結合起來，可以建立起 $\lambda(\tau)$ 在整個模變換羣 Σ 裏邊變化的狀況。第一，我們有

$$\lambda(I\tau)=\lambda(\tau),\quad \lambda(S\tau)=\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1},\quad \lambda(T\tau)=1-\lambda(\tau),$$

其次，有

$$\lambda(ST\tau)=\frac{\lambda(\tau)-1}{\lambda(\tau)},\ \lambda(TS\tau)=\frac{1}{1-\lambda(\tau)},\ \lambda(TST\tau)=\frac{1}{\lambda(\tau)}。$$

今將證明，我們的任務還不祗是 $\lambda(U\tau)$ 所取的一組數值，這裏邊 U 是羣 Σ 的變換。為要達成我們需要的目的，首先有

$$\lambda(S^2\tau)=\frac{\lambda(S\tau)}{\lambda(S\tau)-1}=\frac{\lambda(\tau)}{[\lambda(\tau)-1]\left[\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}-1\right]}=\lambda(\tau)。$$

但因羣 Σ 裏邊的每一變換 U 都具有以下的形狀:

$$U=TS^iTS^k\cdots TS^mTS^n,$$

故為了得出函數 $\lambda(U\tau)$ 的不同的值，衹須考察這種變換 U，他們使數 $i, k, \cdots, m, n$ 內的每一個是 0 或 1，這是容易證明的。其次，因 $T^2=I$，故考察的變換衹具以下的各種形狀:

(9)　$TSTS\cdots T,\ TSTS\cdots TS,\ STS\cdots T,\ STS\cdots TS$。

但不難驗證，下邊的等式成立:

$$STSTST=TSTSTS=I。$$

故變換　$STSTST,\quad TSTSTS$

使 $\lambda(\tau)$ 不變。故在(9)內所餘的變換可分為五大類，即

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} S, & T, \\ ST, & TS, \\ & TST, \end{cases}$$

$$(\beta)\qquad \begin{cases} TSTS, & STST, \\ TSTST, & STSTS。\end{cases}$$

上邊(α)組裏邊的變換已被考察過了。至於變換(β)，它們並未得出新的變換，例如

$$\lambda(TSTS\tau)=\lambda(TSTSTSST\tau)=$$
$$=\lambda(ST\tau)。$$

容易作出函數 $\lambda(\tau)$ 的基本領域。這一領域，我們將要叫做 D_2，包含與整個模羣 Σ 的基本領域 D 等價的六個領域。要想作出 D_2，取 D 的等價的領域 I 以替代 D (圖 7)，這領域是由直線

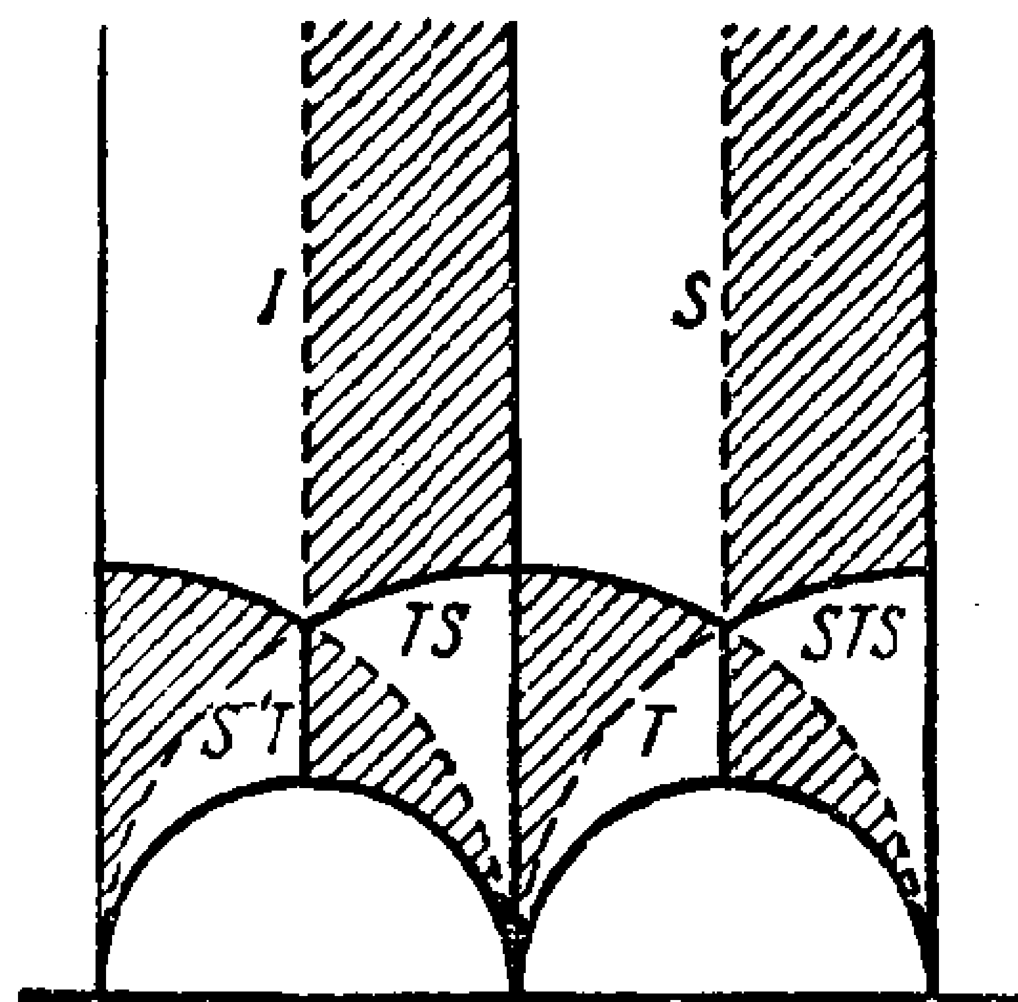


圖 7.

$$\Re\tau=-1,\quad \Re\tau=0$$

和圓周

$$|\tau+1|=1,\quad |\tau|=1$$

包圍而成的。

其次，對於這領域的每一點都作變換 S。簡單地說，領域 I 受變換 S 所得的領域叫做 S。同樣可作出領域 T、TS、$S^{-1}T$、STS（圖 7）。結果得出函數 $\lambda(\tau)$ 的基本領域 D_2。它是由直線

$$\Re\tau=-1,\quad \Re\tau=1$$

和圓周

$$\left|\tau+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\quad \left|\tau-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

圍成的。與領域 D_2 的境界有連繫的變換是

$$\tau^*=\tau+2\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\tau^*=\frac{\tau}{2\tau+1}\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}。$$

和變換 S、T 產生羣 Σ 類似，這兩個變換產生羣 Σ_2。注意，羣 Σ_2 的特點完全決定於它的變換

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

的性質。第一，α、β、γ、δ 全是整數且滿足

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

其次，

$$\alpha\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 2),\quad \beta\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2),$$
$$\gamma\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2),\quad \delta\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 2),$$

換句話說，α、δ 是奇數，而 β、γ 是偶數。

我們不去說這些事實的證明了，因爲我們不需用它們。

第五章　雅各比函數

23. 雅各比及黎曼型的第一種橢圓積分　橢圓積分

(1) $$u=\int_y^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}},$$

的反函數是衞爾斯脫拉斯函數 $y=\wp(u)$，在雅各比理論中不去討論它而討論積分

(2) $$w=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

它祇包含一個參數 k；這個參數叫做被考察的積分的模。

假定 $x^2=\xi$, $t^2=z$，則積分(2)取以下的形狀：

(3) $$w=\int_0^\xi \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}。$$

這是黎曼型。

雅各比或黎曼型的積分共包含一個參數，而不像衞爾斯脫拉斯積分包含兩個參數的那種情形，在各種計算中顯出特別方便。至於理論的研究，則衞爾斯脫拉斯型幾乎經常是最可取的。

在構成衞爾斯脫拉斯理論以後，再獨立地討論積分(3)就是多餘的事了。最簡單的是利用下列事實：必須實行變數 z 變爲變數 s 的分式線形變換(也就是變數 ξ 變爲變數 y)，作此變換後使積分 w 恰變成積分 u 再乘一常數因子。因當 $s=\infty$ 時 z 必須爲零，故此變換必須具以下的形狀：

$$z=\frac{\mu}{s-\lambda}。$$

多項式 $4s^3-g_2s-g_3$ 的根 $s=e_1$、e_2、e_3 必須和數值 $z=1$、$\frac{1}{k^2}$、∞ 相

當。故 λ 必須等於數值 e_α 中的一個。假定 $\lambda=e_3$, $\mu=e_1-e_3$。則根 $s=e_1$ 變爲 $z=1$。因此有

(4) $$z=\frac{e_1-e_3}{s-e_3}$$

及 $$\xi=\frac{e_1-e_3}{y-e_3}。$$

由(4)得出 $$s-e_3=\frac{e_1-e_3}{z},$$

$$s-e_1=\frac{(e_1-e_3)(1-z)}{z},$$

$$s-e_2=\frac{(e_1-e_3)\left(1-\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}z\right)}{z},$$

$$ds=-\frac{(e_1-e_3)dz}{z^2}。$$

故 $$u=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^\xi\frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)\left(1-\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}z\right)}}。$$

要想把這一公式和(3)看作一個東西,祇命

(5) $$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$$

及 $$w=\sqrt{e_1-e_3}\,u$$

就夠了。我們的結果可以表述如下:如有量 k^2(有限值,不等於零,也不等於1),則取某三個值 e_1、e_2、e_3,使他們的和等於零且滿足(5);然後作出相當的函數 $\wp(u)$,則

$$\xi=\frac{e_1-e_3}{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}。$$

積分(2)的反形具有以下的形狀:

(6) $$x=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}}。$$

茲將這一函數用西他函數表示出來。爲此所必須的公式在表 VI 及 X 裏。我們的結果具有下邊的形狀:

$$x=\frac{\pi}{2\omega}\ \vartheta_3^2\frac{\sigma\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}=\frac{\pi\vartheta_0\vartheta_3^2}{\vartheta_1'}\ \frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}=$$

$$=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\ \frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}。$$

勒讓得(Legendre)早就詳細地研究了積分(2),作爲 x 及 k^2 的函數。這裏特別注意的是被叫做標準的情形,這時 k^2 是正數且小於 1,而 x 在區間[0,1]內。在這種情形內,自然可假定

$$t=\sin\psi,\quad x=\sin\varphi。$$

這時積分(2)變爲以下的形狀:

$$(2^{\text{bis}})^{\ominus}\qquad w=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}。$$

這一積分的反函數 φ,雅各比叫做是 w 的幅角:

$$\varphi=\operatorname{am} w。$$

這時積分(2)反形的結果是

$$x=\sin\varphi=\sin\operatorname{am} w。$$

這一函數雅各比叫做幅角的正弦(sinus amplitudinis)。另一個函數是

$$(7)\qquad \sqrt{1-x^2}=\cos\varphi=\cos\operatorname{am} w。$$

另外,雅各比還導入函數

$$(8)\qquad \sqrt{1-k^2x^2}=\Delta\varphi=\Delta\operatorname{am} w,$$

它叫做幅角的戴爾塔(дельта)。函數(7)及(8)當 $w=0$ 時,兩邊都變爲 1。現今不採取雅各比的表示法。古戴爾曼(Gudermann)

⊖ 譯者註: bis 是重複或再的意思。

用下邊的符號代替它們：

$$x=\operatorname{sn} w, \sqrt{1-x^2}=\operatorname{cn} w, \sqrt{1-k^2x^2}=\operatorname{dn} w。$$

24. 雅各比函數 前節內我們曾導出函數

$$\operatorname{sn} w=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}。$$

這是 w 的一個有理型函數，祇依靠一個參數 $h=e^{\pi i\tau}$。事實上，如果不計變數 $\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}$，則西他函數祇與參數 h 有關而且 h 是 $2\omega\sqrt{e_1-e_3}=\pi\vartheta_3^2$ 所依賴的唯一的量。但由前節的考察推出，作爲雅各比函數的參數可取模數 k 以替代 $h=e^{\pi i\tau}$ 或 τ。事實上，由上節得出，有了 k 後，由上半平面可決定數 τ，使對於這個 τ 值所作成的，利用函數 $\wp$ 或西他函數所表出的函數 $x=\operatorname{sn} w$ 是以下積分的反函數

$$w=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}。$$

這樣，對於函數 $\operatorname{sn} w$ 除去符號 $\operatorname{sn}(w|\tau)$ 以外 $\operatorname{sn}(w;k)$ 是函數 $\operatorname{sn} w$ 更完全的符號。關於函數 $\operatorname{cn} w$，$\operatorname{dn} w$ 也有類似的附註。

比

$$\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$$

的原始週期是 2、τ。

由此可知，函數 $\operatorname{sn} w$ 的原始週期是

$$4\omega\sqrt{e_1-e_3},\ 2\omega'\sqrt{e_1-e_3}。$$

這是 h 的函數。取以下的符號：

$$\omega\sqrt{e_1-e_3}=K,\quad \omega'\sqrt{e_1-e_3}=iK'。$$

這樣，函數 $\operatorname{sn} w$ 的原始週期是 $4K$、$2iK'$。

通常寫

$$\frac{w}{2K}$$

作爲西他函數的變數是不方便的。

以下是黎曼的符號：

$$\theta_\alpha(w)=\vartheta_\alpha\left(\frac{w}{2K}\right)。\qquad (\alpha=0、1、2、3),$$

於是有

$$\operatorname{sn} w=\frac{\theta_3}{\theta_2}\,\frac{\theta_1(w)}{\theta_0(w)}。$$

現今轉到函數

$$1-x^2,\quad 1-k^2x^2。$$

回想起 § 22 的公式(6)，我們將有

$$1-x^2=1-\frac{e_1-e_3}{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}=\frac{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_1}{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}=$$

$$=\left\{\frac{\sigma_1\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}\right\}^2=\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}\left\{\frac{\vartheta_2\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w}{2\omega\sqrt{e_1-e_3}}\right)}\right\}^2。$$

即

$$1-x^2=\frac{\theta_0^2}{\theta_2^2}\left\{\frac{\theta_2(w)}{\theta_0(w)}\right\}^2,$$

由此有

$$\sqrt{1-x^2}=\operatorname{cn} w=\frac{\theta_0}{\theta_2}\,\frac{\theta_2(w)}{\theta_0(w)}。$$

同樣求得

$$\operatorname{dn} w=\frac{\theta_0}{\theta_3}\,\frac{\theta_3(w)}{\theta_0(w)}。$$

這些函數的原始週期是

$\operatorname{cn} w$	$4K$	$2K+2iK'$
$\operatorname{dn} w$	$2K$	$4iK'$

圖 8 表明這三個函數的基本平行四邊形。

我們看出，這三個平行四邊形是不同的，但它們具有相同的面積。

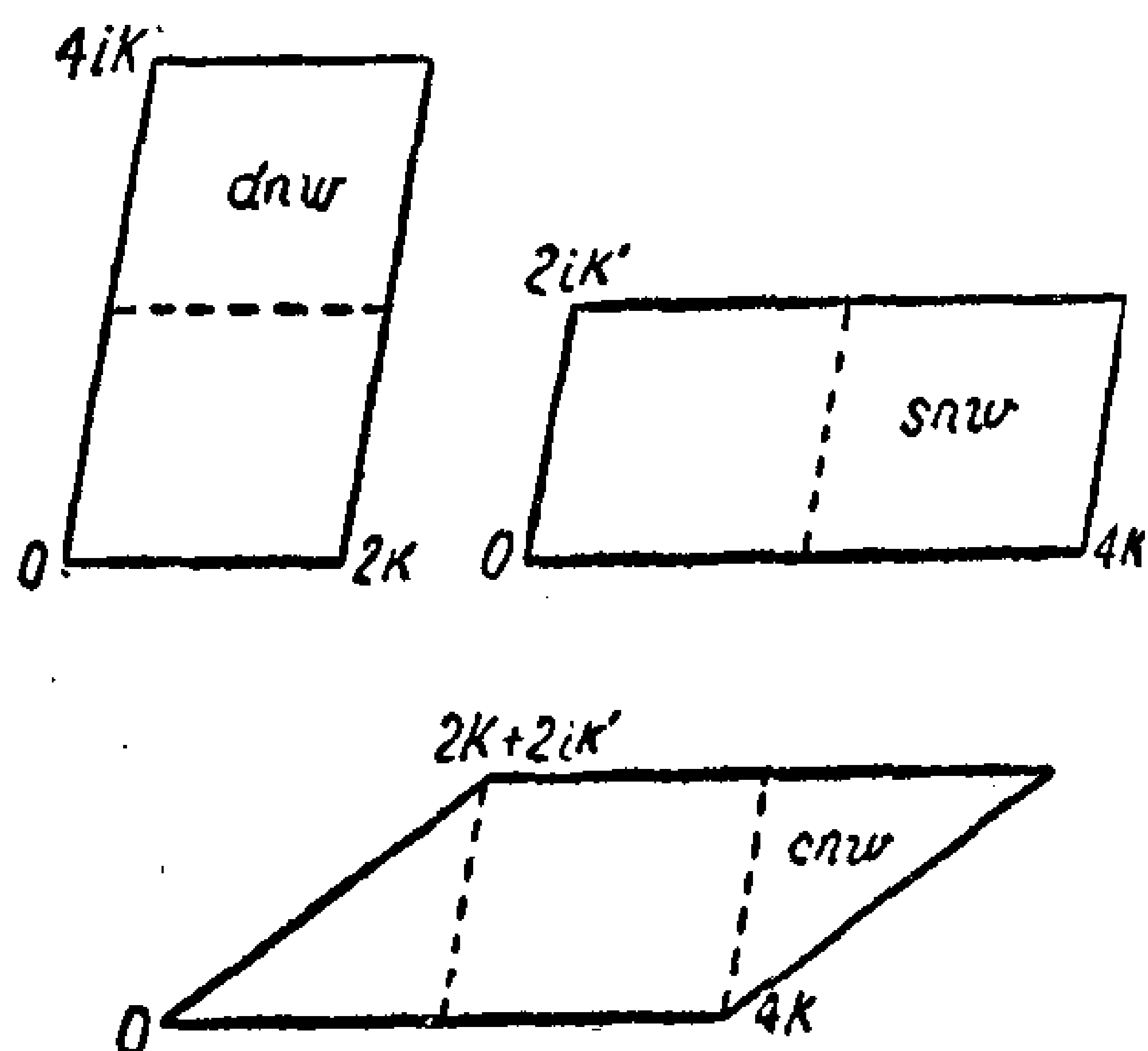


圖 8.

不難指出雅各比函數的零點及極點，以及在其他某些點處的值。這些結果都包含在表 XIII 及 XV 內。

應當着重指出的是，雅各比函數的極點是一級的。這樣，在這裏我們有按 §4 分類的第二種型的函數。

在衞爾斯脫拉斯理論中，對於週期 2ω、$2\omega'$ 是可以任意取的。所要求的祇是比

$$\tau=\frac{\omega'}{\omega}$$

要有異於零的，平常是正的，虛數部份。

現今對雅各比函數的處理就不同了。週期 $2K$、$2iK'$ 不能任意選擇。祇是比

$$\tau=\frac{iK'}{K}$$

或者量

$$h=e^{\pi i\tau}=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

是可以任意的。此後，週期就確定了，而且我們對於 K 有下邊的公式：

$$K=\omega\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2=\frac{\pi}{2}(1+2h+2h^4+\cdots)^2。$$

在另一方面，對於 k^2 也可用 h 的式子表示出來。它具有下邊的形狀：

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}=\left\{\frac{2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+\cdots}{1+2h+2h^4+\cdots}\right\}^4\quad\left(h^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{\pi i\tau}{4}}\right)。$$

今再引幾個雅各比所創的西他函數的最初的符號以結束本節：

$$H(w)=\theta_1(w),\quad \Theta(w)=\theta_0(w),$$
$$H_1(w)=\theta_2(w),\quad \Theta_1(w)=\theta_3(w)。$$

這些符號現今還與以上所說的符號並用。

25. 雅各比函數的微分法　取積分

(1) $$w=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

它的反形是函數

(2) $$x=\operatorname{sn} w。$$

由(1)得 $$\frac{dx}{dw}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

故由(2)得 $$\frac{d}{dw}\operatorname{sn} w=\operatorname{cn} w\cdot\operatorname{dn} w。$$

想要得出 $\operatorname{cn} w$ 及 $\operatorname{dn} w$ 的導數，需要微分下邊的關係式：

$$\operatorname{sn}^2 w+\operatorname{cn}^2 w=1,$$
$$k^2\operatorname{sn}^2 w+\operatorname{dn}^2 w=1,$$

由此得 $$\frac{d}{dw}\operatorname{cn} w=-\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{dn} w,$$

$$\frac{d}{dw}\operatorname{dn} w=-k^2\operatorname{sn} w\cdot\operatorname{cn} w。$$

注意，函數 $\operatorname{sn}^2 w$ 的原始週期是數 $2K$、$2iK'$，這是由 § 23 的公式(6)(沒有作函數 $\operatorname{sn} w$ 的任何研究)推出的，它可以寫成以下的形狀：

(3) $$\operatorname{sn}^2 w=\frac{e_1-e_3}{\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-e_3}。$$

以 $2K$、$2iK'$ 作週期的全體橢圓函數，由前邊證明的一般定理知道，可以用下式表示出來：

$$R_1(\wp)+R_2(\wp)\wp',$$

其中 $$\wp=\wp\left(\frac{w}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)。$$

公式(3)表明,以 $2K$、$2iK'$ 作週期的全體橢圓函數,都可用下式表示出來:

$$R_1(\mathrm{sn}^2 w)+\mathrm{sn}\, w\cdot\mathrm{cn}\, w\cdot\mathrm{dn}\, w\cdot R_2(\mathrm{sn}^2 w)。$$

由此得:以 $2K$、$2iK'$ 作週期的偶橢圓函數等於 $R(\mathrm{sn}^2 w)$,而奇橢圓函數則等於 $\mathrm{sn}\, w\cdot\mathrm{cn}\, w\cdot\mathrm{dn}\, w\cdot R(\mathrm{sn}^2 w)$。

26. 雅各比函數 $Z(w)$ 這個函數與衛爾斯脫拉斯函數 $\zeta(u)$ 相似而且用下式界說

$$Z(w)=\frac{\theta_0'(w)}{\theta_0(w)}。$$

這是一個奇函數,在週期平行四邊形內有一個一級的極點 $w=$ $=iK'$。因

$$\theta_0(w+2K)=\theta_0(w),$$

$$\theta_0(w+2iK')=-h^{-1}e^{-\frac{\pi i w}{K}}\theta_0(w),$$

故

$$Z(w+2K)=Z(w),$$

$$Z(w+2iK')=Z(w)-\frac{\pi i}{K}。$$

利用函數 $\theta_0(w)$ 的無窮乘積展開式,得出 $Z(w)$ 的無窮級數展開式,它具有以下的形狀:

$$Z(w)=\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{2n-1}\sin\frac{\pi w}{K}}{1-2h^{2n-1}\cos\frac{\pi w}{K}+h^{4n-2}}。$$

與函數 $\zeta(u)$ 類似,可用函數 $Z(w)$ 表示任意的橢圓函數。

茲取函數 $-k^2\,\mathrm{sn}\, u\cdot\mathrm{sn}\, v\cdot\mathrm{sn}(u+v)$

為例。它的原始週期是 $2K$、$2iK'$。

在週期平行四邊形內它具有極點:

$$u=iK',\quad -v+iK'。$$

這兩個極點全是一級的,同時對應的留數各為 -1、1。故

$$-k^2\,\mathrm{sn}\, u\cdot\mathrm{sn}\, v\cdot\mathrm{sn}(u+v)=Z(u+v)-Z(u)+C。$$

想要決定常數 C，假定 $u=0$。這樣得

$$Z(v)+C=0。$$

於是

$$(1)\qquad Z(u+v)-Z(u)-Z(v)=-k^2\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{sn}(u+v)。$$

同樣不難得到下列部份分式展開式：

$$(2)\quad Z(u+v)+Z(u-v)-2Z(u)=-\frac{2k^2\operatorname{sn}^2v\cdot\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}。$$

但是這一展開式也可以由下邊的函數式的零點和極點通過西他函數得出

$$1-k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v。$$

這一式具有下邊的形狀：

$$1-k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v=\theta_0^2\frac{\theta_0(u+v)\theta_0(u-v)}{\theta_0^2(u)\theta_0^2(v)}。$$

由此，若兩邊全取關於 u 的對數的導數，則可得出（2）。在（2）中掉轉量 u 及 v 的位置，得

$$(2^{\text{bis}})\quad Z(u+v)-Z(u-v)-2Z(v)=-\frac{2k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}。$$

今將（2）、(2bis)加起來，則其結果具有以下的形狀：

$$Z(u+v)-Z(u)-Z(v)=$$

$$(3)\qquad =-k^2\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{sn}v\cdot\frac{\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}。$$

將這一式與（1）比較，得

$$(4)\qquad \operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}。$$

這一關係表明函數 $\operatorname{sn}u$ 的加法定理。

27．尤拉定理　由前節求出的關於函數 $\operatorname{sn}u$ 的加法定理可以得出其他函數的加法定理。例如，函數 $\operatorname{cn}u$ 的加法定理可以從關係 $\operatorname{cn}u=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2u}$ 得出來。但無論在勞力及興趣方面全沒有計算的必要，讀者可參看表 XIV，在那裏邊包含一些加法定理的最

重要的公式。

這裏我們來談談問題的另一方面。問題在於，§26 的公式(4)可根據與我們所構造的理論毫無共同之點而是屬於尤拉的理由而得到。

尤拉注意微分方程

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}+$$
$$+\frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+4a_1y^3+6a_2y^2+4a_3y+a_4}}=0$$

且指明，它有代數積分。將這一積分與下一超越積分比較

$$\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}+\int\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}=C,$$

[這裏邊 $f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4$]，即可得出雅各比的加法公式。從實質上說，所說的尤拉定理首先推動了橢圓積分的研究。

尤拉定理最精緻的證明是達爾布(Darboux)的方法。

照達爾布法，注意方程

(1) $$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0。$$

它有超越積分

(2) $$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=A,$$

其中 A 是任意的常數。設命

(3_1) $$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

(3_2) $$v=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

則積分(2)變爲以下的形狀：

(2bis) $$u+v=A。$$

在另一方面，方程（1）可用下方程組替代：

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \\ \dfrac{dy}{dt}=-\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}。\end{cases}$$

將（4）平方，得

$$(5)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2&=(1-x^2)(1-k^2x^2), \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=(1-y^2)(1-k^2y^2)。\end{aligned}$$

微分這兩個方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x(2k^2x^2-1-k^2),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=y(2k^2y^2-1-k^2)。$$

故
$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=2k^2xy(x^2-y^2),$$

或

$$(6)\qquad \frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=2k^2xy(x^2-y^2)。$$

在另一方面，由（5）得出

$$(7)\qquad y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2)。$$

用（7）除（6）得

$$\frac{\dfrac{d}{dt}\left(y\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dy}{dt}\right)}{y\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dy}{dt}}=\frac{2k^2xy\left(y\dfrac{dx}{dt}+x\dfrac{dy}{dt}\right)}{k^2x^2y^2-1}$$

或
$$\frac{d}{dt}\ln\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\ln(k^2x^2y^2-1),$$

由此得
$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=C(1-k^2x^2y^2)。$$

注意(4),得

$$(8)\qquad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=C,$$

這是方程(1)的積分的代數形式。

關係(2)、(8)的每一個都應當是另外一個的推理。由此得出函數 $\operatorname{sn} w$ 的加法定理。

事實上,由(3_1)、(3_2)得

$$x=\operatorname{sn} u,\quad y=\operatorname{sn} v。$$

故(8)可用以下的形式表示出來:

$$(8^{\text{bis}})\qquad \frac{\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}=C。$$

因(8bis)是(2bis)的推理,故 C 是 A 的函數:

$$C=\varphi(A)$$

換句話說,就是

$$\frac{\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}=\varphi(u+v)。$$

想要決定函數 φ 的形狀,假定 $v=0$。這樣有

$$\operatorname{sn}(u)=\varphi(u)$$

這意味着

$$\frac{\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\ \operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}=\operatorname{sn}(u+v)。$$

28. 雅各比型的第二種及第三種標準橢圓積分 回想 §17 的內容,那裏邊已示明,每一個衛爾斯脫拉斯型的橢圓積分可用橢圓函數,與下列三種積分表示出來:

$$(1)\qquad u=\int\frac{dz}{w},$$

$$(2)\qquad \zeta(u)=-\int\frac{z\,dz}{w},$$

$$(3)\qquad \ln\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)}+u\zeta(u_0)=\frac{1}{2}\int\frac{w+w_0}{z-z_0}\cdot\frac{dz}{w},$$

其中
$$w^2=4z^3-g_2z-g_3,$$
$$z_0=\wp(u_0),\quad w_0=\wp'(u_0)。$$

現今我們想注意雅各比及黎曼型的橢圓積分。要將基本積分(1)、(2)、(3)變換成黎曼型,必須把 w^2 代以 $4z(1-z)(1-k^2z)$。其次,作代替 $z=t^2$, 由此導出下邊的積分:

$$(1^{\text{bis}})\qquad \int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$(2^{\text{bis}})\qquad \int\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$(3^{\text{bis}})\qquad \int\frac{t\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}+t_0\sqrt{(1-t_0^2)(1-k^2t_0^2)}}{(t^2-t_0^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt。$$

積分(1bis)可以寫成下邊的形狀:

$$(4)\qquad u=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

這是雅各比理論裏邊的第一種橢圓積分。

在雅各比理論內取積分

$$(5')\qquad \int_0^x\frac{(1-k^2t^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}。$$

作爲第二種標準積分以代替(2bis)。如果我們不顧及常數的因子,則這一式與(2bis)的差是第一種積分。

積分(5′)可以用第一種積分(4)的某一個函數表示出來。雅各比的對應符號是:

$$(5)\qquad E(u)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt\qquad [x=\operatorname{sn}(u;k)]$$

或
$$E(u)=\int_0^u\operatorname{dn}^2(v;\,k)dv。$$

最後,雅各比取

$$(6')\qquad \int_0^x\frac{k^2b\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{1-k^2b^2t^2}\,\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

作爲第三種標準積分以替代(3bis),如果我們不顧及常數的因子,

則它與(3bis)的差是初等函數及第一種積分。

積分(6′)可表爲第一種積分(4)的某一個函數。假定 $b=$ $=\operatorname{sn}(a;k)$，雅各比用$\Pi(u;a)$表示它。這樣就有，

$$\Pi(u;a)=\int_0^x \frac{k^2b\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{1-k^2b^2t^2}\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=$$

$$(6)\qquad =\int_0^u \frac{k^2\operatorname{sn}a\cdot\operatorname{cn}a\cdot\operatorname{dn}a\cdot\operatorname{sn}^2v}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\cdot\operatorname{sn}^2v}dv。$$

在§26內已經證明[公式(2bis)]：

$$\frac{k^2\operatorname{sn}a\cdot\operatorname{cn}a\cdot\operatorname{dn}a\cdot\operatorname{sn}^2v}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2v}=\frac{1}{2}Z(v-a)-\frac{1}{2}Z(v+a)+Z(a)。$$

但因
$$Z(v)=\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)},$$

故
$$\Pi(u;a)=\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}+uZ(a)。$$

在雅各比理論中的這一函數代替了衞爾斯脫拉斯理論內的函數

$$\ln\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}+u\zeta(a)。$$

不難將第二種標準積分$E(u)$用前邊引用過的函數表示出來。爲此目的，再取§26的公式(2bis)：

$$Z(u+v)-Z(u-v)-2Z(v)=-\frac{2k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}。$$

兩邊全用$2\operatorname{sn}v$除，且命v趨於零。取其極限，得

$$\frac{d}{du}Z(u)-Z'(0)=-k^2\operatorname{sn}^2u,$$

故
$$\operatorname{dn}^2u=1-Z'(0)+\frac{d}{du}Z(u),$$

因此有
$$E(u)=[1-Z'(0)]u+Z(u)。$$

右邊第一項的另外表示法，在這裏我們不談了(參看表XVI，以及§30)。

29. 第一種完全橢圓積分 在§24裏邊我們已經導出量K、

K' 作為 τ 或 $h=e^{\pi i\tau}(\Im\tau>0)$ 由下面的公式所決定的函數：

$$(1)\qquad K=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0|\tau)=\frac{\pi}{2}(1+2h+2h^4+\cdots)^2,$$

$$\frac{iK'}{K}=\tau。$$

此外，我們還曾有公式

$$(2)\qquad k^2=\frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}=\left\{\frac{2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+\cdots}{1+2h+2h^4+\cdots}\right\}^4\qquad (h^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{\pi i\tau}{4}}),$$

這是連接量 τ 與模數 k 的關係。在 §22 內作為 τ 的函數我們曾研究量 k^2 的某些性質。在本節內我們將從事研究作為 k 的函數的量 K 及與此有關的另外的問題。

首先取雅各比型的第一種積分作出發點

$$(3)\qquad u=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

其中根式當 $t=0$ 時等於 1。這一積分的反形是函數

$$x=\operatorname{sn}u。$$

我們知道，這是一個週期函數，即對於任意整數 m、m'，有

$$\operatorname{sn}(u+4mK+2m'iK')=\operatorname{sn}u。$$

這一事實還可表達如下：積分（3）是多值函數，而且如對於某一 x，它的值是 u，則對於此同一 x，它有無窮多值

$$u+4mK+2m'iK'。$$

因為祇當積分（3）有不同的積分路時才能有不同的積分值，故對於任意整數 m、m'，必須有這樣的由點 $t=0$ 到點 $t=x$ 的積分路存在，使積分（3）經過這一積分路時，它有值

$$u+4mK+2m'iK'。$$

積分依賴於積分路的研究在複變函數論內有專章講述，在這裏我們從略。我們祇證明，如 k^2 不是大於 1 或等於 1 的正數，則

$$(4)\qquad \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=K,$$

其條件爲積分路是直線，而且根式在區間[0, 1]內是連續函數，且在點 $t=0$ 處等於1。作變換 $t=\sin\psi$，則我們得出已證明的等式(4)具以下形狀：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=K。$$

如上所述，勒讓得將積分

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=F(\varphi,\ k)$$

看成角 φ 及模數 k 的函數。角 φ 在區間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 內變化。命 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 卽可得出 K：

$$K=F\left(\frac{\pi}{2},k\right)。$$

故勒讓得把這一量叫做模數 k 的第一種完全楕圓積分。

爲了着重指出積分路取的是直線且根式具有以上指明的值，有時積分號前加上一撇。這樣，我們應證明

$$'\!\!\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=K。$$

在變數 λ 平面上作由 $\lambda=1$ 沿實數半軸至 $\lambda=\infty$ 的切斷，則左邊得 $k^2=\lambda$ 的函數，它在該平面上是正則的。用 $\varphi(\lambda)$ 表明這一函數，而 K 理解爲由公式(1)所確定的量。

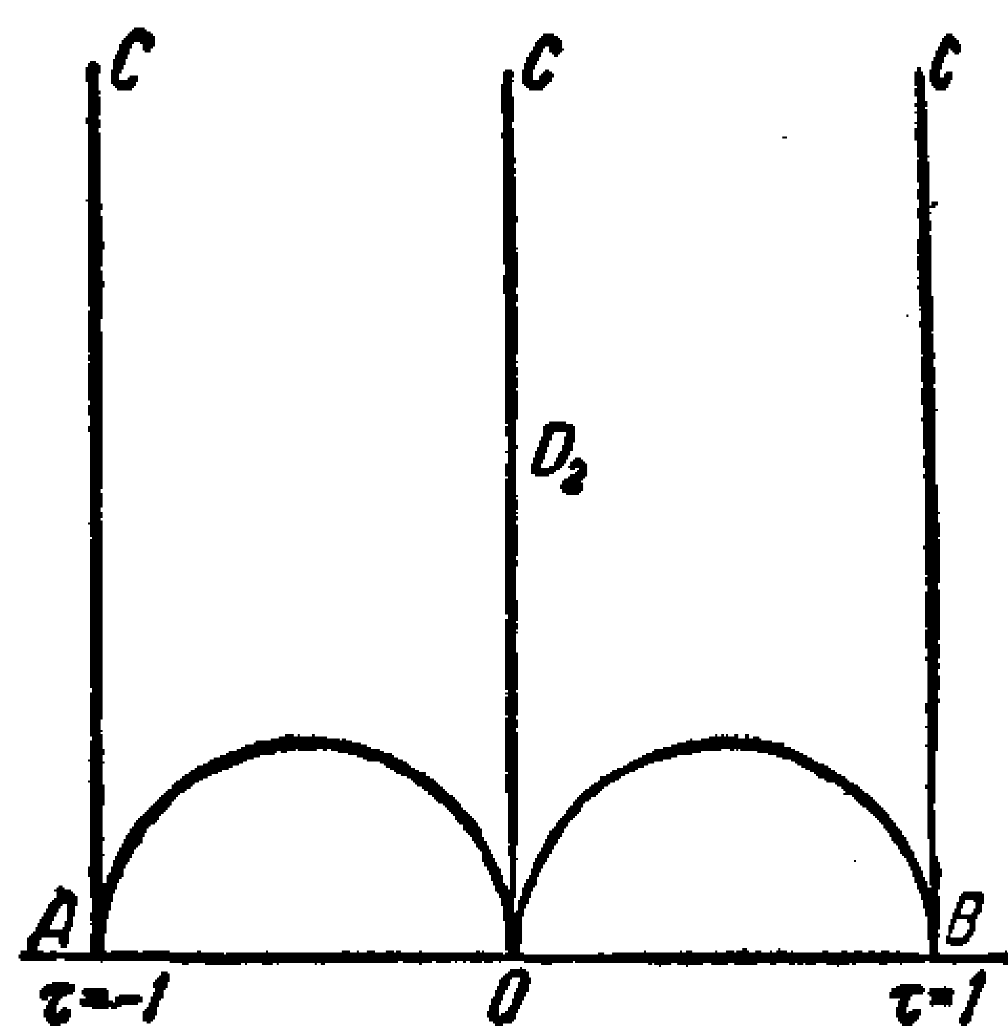


圖 9.

若我們已證明下邊的(1)、(2)，則我們的結論就證明了：

(1)當 $0\leqslant\lambda<1$ 時，下邊的等式成立：

$$\varphi(\lambda)=K,$$

(2)由公式(1)規定的量 K 是由公式(2)確定的 $k^2=\lambda$ 的正則函數，此處變數 λ 所在的平面應順着實數半軸由點 $\lambda=1$ 到點 $\lambda=$

$=\infty$ 作一切斷。

我們知道,量 k^2 在複變數 τ 的上半平面內是 τ 的正則函數。在 § 22 已說明,研究這一函數在領域 D_2 內的情況就夠了,此 D_2 係由以下各線包圍而成的:直線

$$\Re\tau=-1,\quad \Re\tau=1$$

及以點 $\tau=-\frac{1}{2}, \tau=\frac{1}{2}$ 爲圓心,$\frac{1}{2}$ 爲半徑的兩個半圓周。這一領域 D_2 是以 A、O、B、C 作頂點的四角形(圖 9)。

今擬將公式(2)略加變換。爲了這個目的,利用下邊的等式:

$$\vartheta_3^4=\vartheta_0^4+\vartheta_2^4。$$

由此得
$$k^2=1-\frac{\vartheta_0^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}$$

或
$$1-k^2=\frac{\vartheta_0^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}。$$

由此,注意到西他函數的無窮乘積,就可寫出

$$1-k^2=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2n-1}}{1+h^{2n-1}}\right)^8。$$

命 τ 經過正的半虛軸 CO。則 h 單調地由 0 變化到 1,因此 $\lambda=k^2$ 也單調地由 0 變化到 1(圖 10)。

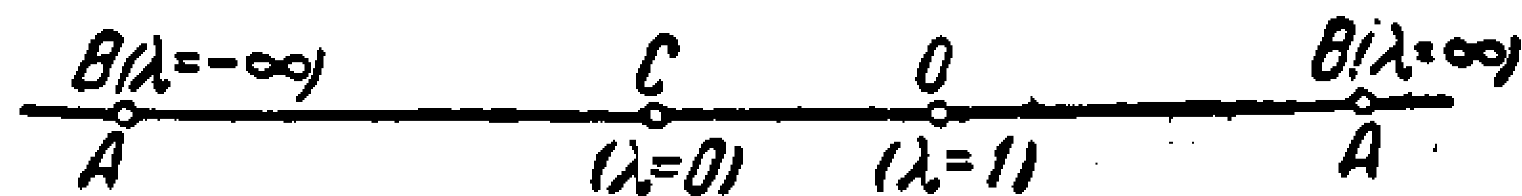


圖 10.

今取直線 CB; 在這一直線上有

$$\tau=1+i\eta,$$

其中 η 由 $+\infty$ 變化到 0。故在 CB 上有

$$1-k^2=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+e^{-2\pi\eta(2n-1)}}{1-e^{-2\pi\eta(2n-1)}}\right]^8,$$

因之,當 τ 經過 CB 時,量 $\lambda=k^2$ 單調地由 0 變化到 $-\infty$。同樣當 τ 劃直線 CA 時也可得出 $\lambda=k^2$ 的變化。

最後,研究半圓周 OA。設命

$$\tau=-\frac{1}{\tau'},$$

則當點 τ' 由點 C 到點 B 劃直線 CB 時,點 τ 沿正向劃圓弧 OA。今注意(參閱 § 22)

$$\vartheta_3(0|\tau)=(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\vartheta_3\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\vartheta_0(0|\tau)=(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)。$$

所以 $$1-k^2=\frac{\vartheta_2^4(0|\tau')}{\vartheta_3^4(0|\tau')},$$

因此有 $$k^2=\frac{\vartheta_0^4(0|\tau')}{\vartheta_3^4(0|\tau')}。$$

或 $$k^2=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-h'^{2n-1}}{1+h'^{2n-1}}\right)^8,$$

其中 $h'=e^{\pi i\tau'}$。這一公式表明,當點 τ 沿正向劃出圓弧 OA 時,$\lambda=$ $=k^2$ 由點 $\lambda=1$ 經過半實數軸至點 $\lambda=\infty$; 當 τ 由點 O 沿圓弧 OB 到 B 時,λ 仍劃上述的半軸。

由上所述得,當 τ 沿正向劃出領域 D_2 右邊一半的境界 $COBC$ 時 $\lambda=k^2$ 由點 $-\infty$ 到點 $+\infty$ 劃出實數軸。由此推出,函數

$$k^2=\frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)} \tag{2}$$

給與 $\lambda=k^2$ 的上半平面在領域 D_2 右邊一半的共形寫像。這個函數也把 λ 的下半平面寫像在領域 D_2 左邊一半。沿着線分 CO (由 $\lambda=0$ 至 $\lambda=1$)接合 λ 上半平面和下半平面,得出 λ 平面,沿半直線 BC(或 AC) 及 OB(或 OA)有一切斷。函數(2)將它寫像在領域 D_2 內。在所說的作出切斷的 λ 平面上,τ 是 $\lambda=k^2$ 的單值解析函數。因此,在這一切斷了的 λ 平面上,由公式(1)所決定的量 K 是 $\lambda=k^2$ 的正則函數。

今可看出，函數 K 在切斷 BC(由 $\lambda=-\infty$ 至 $\lambda=0$)的兩側相對的二點上有相同的值。事實上,這樣的一對點,對應領域 D_2 直線境界上關於虛軸對稱的一對點,但這些點對應同一個值 $h=e^{\pi i\tau}$,因之,由公式(1),對應量 K 的同一值。故 K 在 λ 平面上是關於 $\lambda=k^2$ 的正則函數,這一 λ 平面應作一沿半軸 OB(由 $\lambda=1$ 至 $\lambda=$ $=\infty$)的切斷。在這同一領域內 $\varphi(\lambda)$ 也是正則函數。

我們現在祇剩下當 $0<\lambda<1$ 時證明等式

$$\varphi(\lambda)=K。$$

今卽開始這一證明。

使

$$\operatorname{sn} u=1$$

的 u 的僅有的值是

$$u=(4m+1)K+2m'iK',$$

其中 m、m' 是整數。

事實上，函數 $\operatorname{sn} u$ 是二級的，卽在週期平行四邊形內對於每一值具有二點。方程

$$\operatorname{sn} u-1=0 \tag{5}$$

也具有根 $u=K$，且這一根是二級的,因當 $u=K$ 時,下式變爲零:

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u=\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u。$$

故在以 0、$4K$、$4K+2iK'$、$2iK'$ 爲頂點的基本平行四邊形內，點 $u=K$ 是方程(5)的僅有的根(二級的)。

因

$$'\!\!\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

等於方程(5)的根中的一個,故根據所證明了的有

$$'\!\!\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=(4m+1)K+2m'iK'。$$

命 $0<k^2<1$。則 τ 是純虛數且 K、K' 是實數。因之, $m'=0$,

卽

$$'\!\!\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=(4m+1)K,$$

故所餘的祇是證明 $m=0$ 了。

假定 $m\neq 0$，此時 m 是正整數。

量
$$'\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$
在區間[0, 1]內是 x 的連續函數。當量 x 由 0 增大到 1 時，上積分單調地由 0 增大到 $(4m+1)K>0$。這就是說，有一數 $\xi(0<\xi<1)$ 存在，使
$$'\int_0^\xi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=K,$$
但此時有
$$0<\xi=\operatorname{sn}K<1,$$
這顯然不合理。故 $m=0$，因之，當 $0<k^2<1$ 時，證明了等式
$$'\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=K。$$

與模數 k 相伴有時必須考察所謂補充模數 k'，它是用以下公式界說的：
$$k^2+k'^2=1。$$
今將證明
$$'\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}=K'。\tag{6}$$
這裏是假定 k'^2 不在由點 $\lambda=1$ 到點 $\lambda=\infty$ 的半實軸上。這是由於 k^2 不應該在由點 $\lambda=0$ 到點 $\lambda=-\infty$ 的半實軸上。這樣，當同時研究兩個量 K、K' 時，就必須假定變數 $\lambda=k^2$ 平面沿兩個半軸：由 $\lambda=1$ 到 $\lambda=\infty$ 及由 $\lambda=0$ 到 $\lambda=-\infty$ 作切斷。

為了要證明(6)，再注意關係式
$$\vartheta_3(0|\tau)=(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\vartheta_3\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right),$$
由此得
$$\vartheta_3^2(0|\tau)=\frac{i}{\tau}\vartheta_3^2\left(0\middle|-\frac{1}{\tau}\right)。$$
但因
$$K'=\frac{1}{i}\tau K=\frac{\tau}{i}\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0|\tau),$$

故

$$K'=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)。\tag{1'}$$

在另一方面，我們已看到

$$1-k^2=\frac{\vartheta_0^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}=\frac{\vartheta_2^4\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)}{\vartheta_3^4\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)},$$

卽

$$k'^2=\frac{\vartheta_2^4\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)}{\vartheta_3^4\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)}。\tag{2'}$$

把一對公式(1′)及(2′)和一對公式(1)及(2)比較，看出 K' 之依賴於 k'^2 如同 K 之與 k^2，這就證明了我們的斷言。

本節結束前，我們提出有關衞爾斯脫拉斯公式到雅各比公式的過程的一點注意。

我們已知，量 k^2 用一定的方式可被多項式

$$4x^3-g_2x-g_3$$

的根 e_α 表示出來，卽

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}。$$

設我們想要，k^2 的值不在由點 $\lambda=1$ 至點 $\lambda=\infty$ 的實數半軸及由點 $\lambda=0$ 至點 $\lambda=-\infty$ 的實數半軸上，則根的編號服從以下的條件：若點 e_1、e_2、e_3 在一直線上，則 e_2 應處在他們的中間。

我們也注意，在應用上的最重要情形是 $0<k^2<1$。若根 e_α 全是實數，則我們將有這一情形。在這一情形下一般地有

$$e_1>e_2>e_3。$$

有時這一情形叫做**標準型**(нормальные)。

30. 第二種完全橢圓積分　這些積分對於模數 k 及補充模數

k' 用下邊的公式界說:

$$E='\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt,\quad E'='\int_0^1\sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}}\,dt。$$

容易看出 $$E=E(K),$$

其中 $E(u)$表明 § 28 內研究過的第二種橢圓積分。在那裏曾證明

$$E(u)=[1-Z'(0)]u+Z(u)。$$

因 $$Z(K)=0,$$

故 $$E=[1-Z'(0)]K,$$

因之,有

(1) $$E(u)=Z(u)+\frac{E}{K}u。$$

在 § 12 內曾證明,如果 $\Im\tau>0$, 則

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{\pi i}{2}。$$

對於這個衛爾斯脫拉斯理論內的關係式應當在雅各比理論中也有相當的關係式。這裏應當有量 K、K'、E、E' 以替代量 ω、ω'、η、η'。

它是由勒讓得發現,並用他的名字稱作勒讓得關係式,其形狀是

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}。$$

爲了證明勒讓得關係式,考察函數 $Z(u)$ 及 $E(u)$的某些聯繫到由 τ 變到 $\tau'=-\frac{1}{\tau}$ 的變換公式。故代替 $Z(u)$、$E(u)$ 我們寫成 $Z(u;k)$、$E(u;k)$,應理解由 τ 變到 τ' 對應於由 k 變到 k'。

在 § 22 中曾證明

$$\vartheta_0(\tau'v|\tau')=\sqrt{-i\tau}\,\vartheta_2(v|\tau)e^{-\pi i\tau'v^2}。$$

這裏如用 $\frac{iu}{2K}$ 代替 v, 則得

$$\vartheta_0\left(\frac{u}{2K'}\middle|\tau'\right)=\sqrt{-i\tau}\,\vartheta_2\left(\frac{iu}{2K}\middle|\tau\right)e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}$$

或
$$\Theta(u;\ k')=\sqrt{-i\tau}H_1(iu;\ k)e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}。$$

量
$$H_1(iu;\ k)$$

等於
$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\ \mathrm{cn}(iu;\ k)\Theta(iu;\ k)。$$

故
$$\Theta(u;\ k')=\text{常數}\cdot\mathrm{cn}(iu;\ k)\Theta(iu;\ k)e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}。$$

由此，兩邊關於 u 取對數的導數，得

$$(2)\quad Z(u;k')=-i\frac{\mathrm{sn}(iu;\ k)\mathrm{dn}(iu;\ k)}{\mathrm{cn}(iu;\ k)}+iZ(iu;\ k)-\frac{\pi u}{2KK'}。$$

今轉到函數

$$(\alpha)\qquad -i\frac{\mathrm{sn}(iu;\ k)\cdot\mathrm{dn}(iu;\ k)}{\mathrm{cn}(iu;\ k)}。$$

假定這一函數用西他函數表示出來，然後將 τ 變爲 τ'，利用 § 22 的關係，最後再採用函數 $\mathrm{sn}(u;\ k')$、$\mathrm{cn}(u;\ k')$、$\mathrm{dn}(u;\ k')$，則上式變爲

$$(\beta)\qquad \frac{\mathrm{sn}(u;\ k')\mathrm{dn}(u;\ k')}{\mathrm{cn}(u;\ k')}。$$

式(α)、(β)相等是某些關係式的特殊情形，這些關係式以下有必要來研究而且包含在表 XIX 裏邊。

這樣，(2)可寫成以下的形狀：

$$(3)\quad Z(u;\ k')=\frac{\mathrm{sn}(u;\ k')\mathrm{dn}(u;\ k')}{\mathrm{cn}(u;\ k')}+iZ(iu;\ k)-\frac{\pi u}{2KK'}。$$

將(β)關於 u 微分，

$$\frac{d}{du}\frac{\mathrm{sn}(u;\ k')\mathrm{dn}(u;\ k')}{\mathrm{cn}(u;\ k')}=-1+\mathrm{dn}^2(u;\ k')+\frac{\mathrm{dn}^2(u;\ k')}{\mathrm{cn}^2(u;\ k')}。$$

用式(α)變爲式(β)的那個方法可證明

$$\frac{\mathrm{dn}^2(u;\ k')}{\mathrm{cn}^2(u;\ k')}=\mathrm{dn}^2(iu;\ k)$$

(這一結果也包含在表 XIX 內)。這樣就有

$$\frac{d}{du}\frac{\mathrm{sn}(u;k')\mathrm{dn}(u;k')}{\mathrm{cn}(u;k')}=-1+\mathrm{dn}^2(u;k')+\mathrm{dn}^2(iu;k)。$$

由此得

$$\frac{\mathrm{sn}(u;k')\mathrm{dn}(u;k')}{\mathrm{cn}(u;k')}=-u+\int_0^u\mathrm{dn}^2(u;k')du+$$

$$(\gamma)\qquad +\int_0^u\mathrm{dn}^2(iu;k)du。$$

注意 $$E(u;k')=\int_0^u\mathrm{dn}^2(u;k')du,$$

$$E(iu;k)=\int_0^{iu}\mathrm{dn}^2(t;k)dt=i\int_0^u\mathrm{dn}^2(iu;k)du,$$

我們可將(γ)寫成以下的形狀:

$$\frac{\mathrm{sn}(u;k')\mathrm{dn}(u;k')}{\mathrm{cn}(u;k')}=-u+E(u;k')-iE(iu;k)。$$

故等式(3)給與

$$Z(u;k')-E(u;k')=$$

$$(4)\qquad =i\{Z(iu;k)-E(iu;k)\}-u\left(1+\frac{\pi}{2KK'}\right)。$$

根據公式(1),由關係式(4)可得

$$-\frac{E'}{K'}u=\frac{E}{K}u-u\left(1+\frac{\pi}{2KK'}\right),$$

由此得

$$-E'K=EK'-KK'-\frac{\pi}{2},$$

這就是勒讓得公式,這樣它被證明了。

本節的結束,我們提出關係式

$$(5)\qquad \begin{cases} E(u+2K)=E(u)+2E, \\ E(u+2iK')=E(u)+2i(K'-E')。\end{cases}$$

其中 $E(u)=E(u;k)$。由這些關係式可見,量 E、$i(K'-E')$ 在雅各比理論內起的作用就如同量 η、η' 在衛爾斯脫拉斯理論中所起的作用一樣。由(1),根據

$$Z(u+2K)=Z(u),$$

可推出關係式(5)的第一個。想要得出關係式(5)的第二個，必須取等式

$$Z(u+2iK')=Z(u)+Z(2iK'),$$

$$Z(2iK')=-\frac{\pi i}{K}。$$

由這些等式得

$$E(u+2iK')=E(u)+\frac{2i\left(EK'-\frac{\pi}{2}\right)}{K},$$

所遺留下的問題，祇是根據勒讓得關係式，有

$$\frac{EK'-\frac{\pi}{2}}{K}=K'-E'$$

31．橢圓函數的變態　當橢圓函數的一個或二個週期變爲無窮大時，則變態爲初等函數。在第一種情形，變態的函數將爲三角函數，而在第二種情形則爲有理函數。

命 ω 保持有限值，同時 ω' 趨於無窮大。由界說西葛瑪函數的無窮乘積，容易看出，這時函數 $\sigma(u)$ 變態爲

$$(1)\qquad \frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2}\sin\frac{\pi u}{2\omega}。$$

同樣，由界說 $\zeta(u)$、$\wp(u)$ 的級數，容易看出，$\zeta(u)$ 變態爲

$$(2)\qquad \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2u+\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega},$$

而 $\wp(u)$ 則變態爲

$$(3)\qquad -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}。$$

屬於這一情形下其餘的公式包含在表 VII 內。

假定第二個週期也趨於無窮大，則代替式(1)、(2)、(3)來談

$$(1') \qquad u,$$

$$(2') \qquad \frac{1}{u},$$

$$(3') \qquad \frac{1}{u^2},$$

這些式可由式(1)、(2)及(3)得出，也可直接由函數$\sigma(u)$、$\zeta(u)$、$\wp(u)$藉助於無窮乘積及無窮級數得出。

今轉到作爲k^2的函數的量

$$h,\ K,\ K',\ E,\ E'$$

並研究當$k\to 0$時他們自己將要怎樣。

由等式
$$K = {}'\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

得出
$$\lim_{k\to 0} K = \frac{\pi}{2}。$$

同樣
$$\lim_{k\to 0} E = \frac{\pi}{2}$$

及
$$\lim_{k\to 0} E' = 1。$$

今轉向公式

$$k^2 = \left(\frac{2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + \cdots}{1 + 2h + 2h^4 + \cdots}\right)^4.$$

由這一公式得

$$\lim_{k\to 0} \frac{h}{k^2} = \frac{1}{16},$$

但在另一方面，

$$K' = \frac{\tau}{i} K = -\frac{K}{\pi} \ln h,$$

故
$$K' - \frac{2K}{\pi} \ln \frac{4}{k} = -\frac{K}{\pi} \ln \frac{16h}{k^2}.$$

當$k\to 0$時，右邊趨近於零。因此

$$\lim_{k\to 0}\left(K' - \frac{2K}{\pi} \ln \frac{4}{k}\right) = 0,$$

由此易得以下的結論，

$$\lim_{k\to 0}\left(K'-\ln\frac{4}{k}\right)=0。$$

當 $k^2\to 1$ 時，這一情形沒有特別研究的必要，因爲當 $k'\to 0$ 時有 $k^2\to 1$。

當 $k\to 0$ 及 $k\to 1$ 時函數 $\mathrm{sn}(u;\ k)$、$\mathrm{cn}(u;\ k)$、$\mathrm{dn}(u;\ k)$ 的變態最好藉助於下邊的積分關係式來研究

$$u=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

這個公式聯繫函數 $x=\mathrm{sn}(u;\ k)$ 和它的自變數 u。由此顯知

$$\lim_{k\to 0}\mathrm{sn}(u;\ k)=\sin u。$$

其次，設

$$\xi=\lim_{k\to 1}\mathrm{sn}(u;\ k),$$

則

$$u=\int_0^\xi\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}。$$

因此有

$$\lim_{k\to 1}\mathrm{sn}(u;\ k)=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}=\frac{\sin\mathrm{hyp}\,u}{\cos\mathrm{hyp}\,u}。$$

32. 單擺　解微分方程或計算積分的橢圓函數的知識是力學和工程上最常用的方法。按照一般的傳統，我們把單擺的擺動的問題看成同類應用裏邊典型的例子。

將掛單擺的點取爲坐標原點，並統 Z 軸鉛垂向下(圖 11)。命擺線的長等於 l 及擺的原始位置是在它自己的最低位置 $(z=l)$。擺的速度叫做 v，初速度是 v_0。命 g 表示重力加速度，我們將獲得動能積分

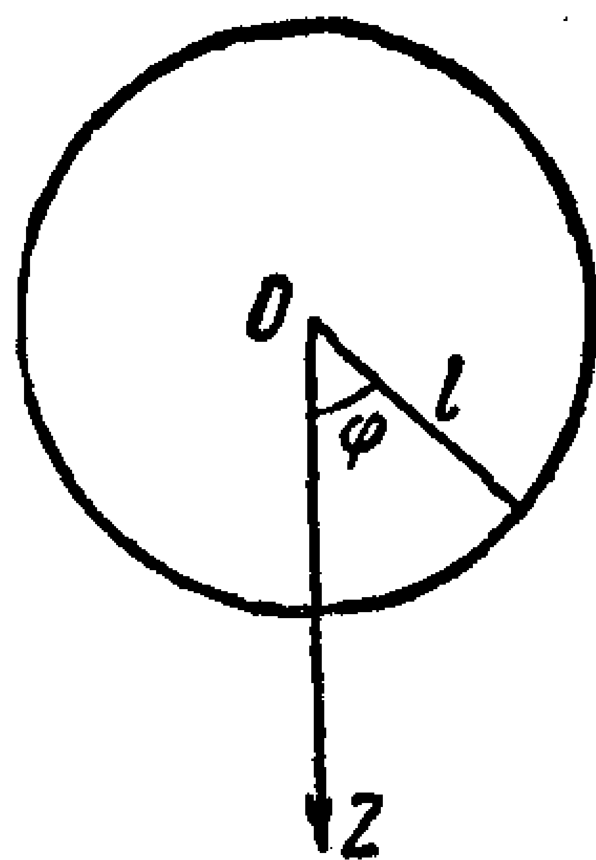


圖 11.

$$\frac{v^2}{2}-gz=-ga。\qquad(1)$$

因當 $z=l$ 時有 $v=v_0$，故常數 a 等於

$$a=l-\frac{v_0^2}{2g}。$$

取擺線與 Z 軸的交角 φ 爲未知函數以替代 z。則

$$z=l\cos\varphi$$

及

$$v=l\frac{d\varphi}{dt}。$$

因之,動能的方程可寫成以下的形狀

$$\frac{l^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-gl\cos\varphi=-ga$$

或

$$\frac{ld\varphi}{\sqrt{2g(l\cos\varphi-a)}}=dt,$$

所以

$$t=\frac{l}{\sqrt{2g}}\int_0^\varphi\frac{d\psi}{\sqrt{l\cos\psi-a}}。\tag{2}$$

按照常數 a 的大於、等於或小於 $-l$, 我們分成三種情形來研究。

第一種情形: $a>-l$。

若 $v_0<2\sqrt{gl}$,

卽假定初速度 v_0 不很大時,則發生這一情形。由關係式

$$a=l\cos\alpha$$

導出角 α。則方程(2)有以下的形狀

$$t=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\varphi\frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi-\cos\alpha}}$$

或

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\varphi\frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\psi}{2}}}。$$

命

$$k^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

及

$$\sin\frac{\psi}{2}=x\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2}=u\sin\frac{\alpha}{2},$$

則得
$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^u\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

所以
$$u=\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\ k\right)。$$

因此得
$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)。$$

這一公式表示擺的運動的規律，由它容易考察這一運動所有的特殊性：

第一，運動是週期性的，且週期等於
$$4\sqrt{\frac{l}{g}}K。$$

第二，如當 $t=0$ 時，擺取最低位置，則擺經過週期四分之一達到它的最高位置($\varphi=\alpha$)。然後再經過週期的四分之一又回到最低位置。最後，再經過週期的四分之一以達到鉛垂軸另一方面的最高位置($\varphi=-\alpha$)。第三，擺在最高位置的速度等於零。

第二種情形：　　$a=-l$。

這一情形是上一情形的極限情形，且有
$$v_0=2\sqrt{gl}。$$

今因 $\alpha=\pi$，故我們將有方程
$$\sin\frac{\varphi}{2}=u$$

及
$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^u\frac{dx}{1-x^2}。$$

求積分得
$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{1+u}{1-u},$$

故
$$\sin\frac{\varphi}{2}=\mathrm{tg\ hyp}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)。$$

這一公式指出，當 t 由 0 增加到 ∞ 時，角 φ 單調地由 0 增加到 π，即擺恆向一方面移動，而且最高的位置是它的永遠達不到的極限位置。

第三種情形：　　$a<-l$。

當　　$v_0>2\sqrt{gl}$

時發生這一情形，這時方程（2）可寫成以下的形狀：

$$t=\frac{l}{\sqrt{2g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{l\left(1-2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)-a}}。\tag{3}$$

命　　$k^2=\frac{2l}{l-a}$，

則　　$0<k<1$

及　　$\sin\frac{\psi}{2}=x,\quad \sin\frac{\varphi}{2}=u$。

此時（3）取以下的形狀：

$$t=\sqrt{\frac{2l}{l-a}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^u\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}。$$

由此　　$u=\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{l-a}{2l}}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\,k\right)$

因此，有　　$\sin\frac{\varphi}{2}=\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{l-a}{2l}}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\sqrt{\frac{2l}{l-a}}\right)$。

這一公式指出，對於等於

$$\frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{g(l-a)}}K$$

的 t，擺達到它的最高位置。但在這一位置，它的速度異於零。一般，速度永遠不能爲零，因爲，像方程（1）指出的，當 $z=a<-l$ 時才可能發生。但同時 z 永遠包含在 $-l$ 及 l 之間。這樣，現今將發生永遠沿同一方向的圓周運動以替代擺動。

第六章　橢圓函數的變換

33. 橢圓函數變換的問題　問題可表述如下：求出條件，使微分方程

(1) $$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{g(y)}},$$

其中 $f(x)$、$g(y)$是四次或三次多項式具有代數的積分，即具以下形狀的積分

$$F(x, y)=0,$$

其中 F 是它的變數的多項式，若指定的條件滿足了，試求此積分。換句話說，這裏所講的是，用代數的關係式

$$F(x, y)=0$$

變換橢圓微分

(2) $$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

爲橢圓微分

(2bis) $$\frac{dy}{\sqrt{g(y)}}。$$

我們在上邊已經考察過這個一般問題的某些特例。

第一，在 § 17 內已經證明過，微分(2)用適當的一次分式或如現今將要說的，一次變換

(3) $$x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$$

可以完全化成衛爾斯脫拉斯的標準形狀

$$M\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}.$$

這樣，微分方程

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=M\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}},$$

是方程(1)的特殊情形，且有分式積分(3)，當然，多項式 $f(x)$ 的係數和量 M、g_2、g_3 之間係假定存在着某些關係。

第二，在 § 27 內已證明尤拉定理，由此定理，方程

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

具有代數的積分。尤拉方程是方程(1)的特殊情形，此時 $g(y)=$ $=f(y)$。

關於變換的一般問題的重要性，由這兩個特殊情形就可以看出來，這兩種情形之一包含橢圓函數的一個基本性質——代數的加法定理的存在；另一情形提供了可能，使橢圓積分的研究祇限於某些標準型式，這樣在一般計算的時候，以及特別藉助附表來計算時是很有益的。

把已知的橢圓微分(2)化為盡量簡單的型(2bis)的企圖，縱使用 x 及 y 的複雜的代數關係，毫無疑問，刺激了橢圓函數變換的一般理論的發展，這一般理論主要地是由於亞倍爾(Abel)及雅各比的努力所創造的。

要解決變換的一般問題，先必須將這一問題化成比較簡單的問題。

我們有權作的第一個化簡是將方程(1)換為方程

$$\frac{dx}{\sqrt{4x(1-x)(1-k^2x)}}=M\frac{dy}{\sqrt{4y(1-y)(1-\lambda^2y)}}。\tag{4}$$

事實上，用最初變數的適當的變換常可把方程(1)化為這種形式。

此外，我們可祇限於求使點 $y=0$ 相當於點 $x=0$ 的方程(4)之積分，換句話說，我們可祇限於求 x 與 y 之間的；由下關係式推

出的代數關係：

(5) $$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} = M\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-\lambda^2t)}}。$$

事實上，x 與 y 的一般關係具有以下的形狀：

$$\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} = M\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-\lambda^2t)}},$$

其中 a 是常數。設我們可以求出 z 與 y 的，由下邊的特殊關係式推出的代數關係：

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} = M\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-\lambda^2t)}},$$

則一切就化為求由下列關係所推出來的 x 與 z 的代數關係了，

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} =$$

$$= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} - \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}}。$$

這一最後的問題可根據尤拉的定理（橢圓函數的加法定理）解決。

34. 一般問題的簡化　按前節的研究，取方程

(1) $$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} = M\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-\lambda^2t)}}。$$

命
$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} = u,$$

用參數方程

(2) $$\begin{cases} x = \mathrm{sn}^2(u;k) \equiv \varphi(u), \\ y = \mathrm{sn}^2\left(\dfrac{u}{M};\lambda\right) \equiv \psi(u), \end{cases}$$

替代方程（1）。

現今我們的問題是求使兩個橢圓函數 $\varphi(u)$、$\psi(u)$ 有代數關係式的條件。

在變為參數方程（2）以前，參數 k、λ、M 之間的某些關係可能是所求的條件。現今可以求這些條件，它是參數 k、λ、M 之間

的關係或是函數 $\varphi(u)$ 的週期 2ω、$2\omega'$ 與函數 $\psi(u)$ 的週期 $2\tilde{\omega}$、$2\tilde{\omega}'$ 之間的關係。

我們看出來,與參數 k、λ、M 的複雜關係不同,週期之間的關係有簡單的且容易看出的形狀,因之,首先可分解問題爲若干特殊問題,然後再用橢圓函數論的一般方法解此等特殊問題。

這樣,就可假設函數 $x=\varphi(u)$,$y=\psi(u)$ 之間可以有代數的關係

$$F[\varphi(u),\ \psi(u)]=0\ 。$$

在這恆等式裏如用 $u+2m\omega'$ 代替 u,內中 $m=\pm1,\ \pm2,\ \cdots$,則得出無數個恆等式

$$F[\varphi(u),\ \psi(u+2m\omega')]=0。$$

設
$$F(x,\ y)=0$$

是關於 y 的 n 次方程,則對於已知的 x 所得到 y 的不同的值不能多於 n 個。卽在點

$$v,\ v\pm2\omega',\ v\pm4\omega',\ \cdots \tag{3}$$

處函數 $\psi(u)$ 的不同數值不能多於 n 個。這祇在數值組(3)中關於週期 $2\tilde{\omega}$、$2\tilde{\omega}'$ 作模數爲等餘時的那種情形才有可能。假定

$$v+2b\omega'=v+2a\omega'+2\alpha\tilde{\omega}'+2\beta\tilde{\omega},$$

其中 a、b、α、β 是整數,則得出關係式

$$r\omega'=\alpha\tilde{\omega}'+\beta\tilde{\omega}$$

同樣可求得
$$s\omega=\gamma\tilde{\omega}'+\delta\tilde{\omega}\ 。$$

這樣,我們得到下面的結果:設在函數(2)之間有代數關係式存在,則這些函數的週期滿足關係式

$$\begin{cases} r\omega'=\alpha\tilde{\omega}'+\beta\tilde{\omega}, \\ s\omega=\gamma\tilde{\omega}'+\delta\tilde{\omega}, \end{cases} \tag{4}$$

其中 r、s、α、β、γ、δ 是整數。

逆命題也正確:設函數(2)的週期之間存在整係數的關係式

(4),則函數(2)之間有代數關係式。

為了證明,命

$$\Omega'=r\omega',$$

$$\Omega=s\omega,$$

如此就有

$$\Omega'=\alpha\tilde{\omega}'+\beta\tilde{\omega},$$

$$\Omega=\gamma\tilde{\omega}'+\delta\tilde{\omega}。$$

作函數 $\Phi(u)=\wp(u|\Omega,\Omega')$。因為函數 $\varphi(u)$、$\psi(u)$都是偶函數且週期為 2Ω、$2\Omega'$,故這些函數的每一個都可用 $\Phi(u)$的有理函數表示出來:

$$\varphi(u)=R_1[\Phi(u)],\ \psi(u)=R_2[\Phi(u)]。$$

由這些關係式消去函數 $\Phi(u)$,我們就得出函數 $\varphi(u)$ 及 $\psi(u)$之間的代數關係式。這樣,我們的斷言就證明了。

我們順便證明方程(1)所化成的代數方程

(5) $$F(x,y)=0,$$

即橢圓函數變換理論的方程的重要性質:這些方程可有參數的表示。

(6) $$x=R_1(z),\ y=R_2(z),$$

其中 R_1、R_2 是有理函數。

代數曲線(5)的點的坐標滿足表示式(6),叫做有理曲線(уникурсальная кривая, unicursal curve)。它們具有許多美妙的性質。

由我們的研究得出重要的結果:可以祇限定研究有理變換。最後這些相當於由公式

$$\omega'=\alpha\tilde{\omega}'+\beta\tilde{\omega},$$

$$\omega=\gamma\tilde{\omega}'+\delta\tilde{\omega}$$

所表示出來的週期變換,其中 α、β、γ、δ 是整數,而且我們經常認為行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = n$$

是正數。

週期 2ω、$2\omega'$ 的平行四邊形的面積顯然等於週期 $2\tilde{\omega}$、$2\tilde{\omega}'$ 的平行四邊形面積的 n 倍。我們將研究的變換叫做 n 級的變換。我們在 §§ 8 及 9 內曾研究模羣及模函數時，以及在 § 22 內研究西他函數的變換時，曾遇到一級變換($n=1$)。在 § 9 內尤其是曾建立，任意一級變換可連續應用以下的兩個基本的(或主要的)一級變換得出來：

$$(S) \qquad \begin{cases} \omega' = \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}, \\ \omega = \tilde{\omega}; \end{cases}$$

$$(T) \qquad \begin{cases} \omega' = -\tilde{\omega}, \\ \omega = \tilde{\omega}'。 \end{cases}$$

原來，任意 n 級變換都可重複用一級變換及以下的兩個變換(叫做 m 級主要的變換)表示出來：

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \omega' = \tilde{\omega}', \\ \omega = m\tilde{\omega} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \tilde{\omega}' = \omega', \\ \tilde{\omega} = \dfrac{1}{m}\omega \end{cases}$$

及

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \omega' = m\tilde{\omega}', \\ \omega = \tilde{\omega} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \tilde{\omega}' = \dfrac{1}{m}\omega', \\ \tilde{\omega} = \omega, \end{cases}$$

其中 m 是自然數。第一變換是第一個週期(2ω)被整數 m 除。第二變換是第二週期($2\omega'$)被整數 m 除。

我們將證明這一斷言。若有變換

$$\begin{cases} \omega' = \alpha\tilde{\omega}' + \beta\tilde{\omega} \\ \omega = \gamma\tilde{\omega}' + \delta\tilde{\omega}, \end{cases}$$

用 r 表明數 α、β 的最大公約數，使

$$\alpha=ra,\quad \beta=rb,$$

其中 a、b 是互質的數。則有二整數 c、d 存在，使

$$ad-bc=1\text{。}$$

命

$$\begin{cases}\omega_1'=a\tilde{\omega}'+b\tilde{\omega},\\ \omega_1=c\tilde{\omega}'+d\tilde{\omega}\text{。}\end{cases}$$

則

$$(\alpha)\qquad \begin{cases}\omega'=r\omega_1',\\ \omega=q\omega_1'+s\omega_1\text{。}\end{cases}$$

用一級變換可把數對$(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$變為數對$(\omega_1, \omega_1')$。故我們應當祇研究變換$(\alpha)$。為了確定起見採取 $r>0$，命

$$\begin{cases}\omega'=r\omega_3',\\ \omega=\omega_3,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega_2'=\omega_1',\\ \omega_2=s\omega_1\text{。}\end{cases}$$

我們現在有週期對$(2\omega, 2\omega')$的第二個週期與週期對$(2\omega_2, 2\omega_2')$的第一個週期的除法變換。用這些變換，(α)取以下的形式：

$$\begin{cases}\omega_3'=\omega_2',\\ \omega_3=q\omega_2'+\omega_2,\end{cases}$$

這是一級的變換。

我們看出來，將數對$(2\omega, 2\omega')$變為數對$(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$可以分為下列的變換：第二週期的除法變換，其次，是一級變換，再其次是第一週期的除法變換，最後，再一次一級的變換。

這樣我們的斷言就證明了。

不難看到　$n=r\cdot s$。

我們也看出，如討論變換(I)、(II)，可採取：m 是質數及在任何

情形下可單獨研究 m 是奇數及 $m=2$ 的情形。

嚴格地說，二個變換(I)及(II)的研究不是必須的，因爲，例如，變換(II)歸結於變換(I)及一級變換。

我們在§38內將說明這個附記。但照例，直接研究變換(II)而不把它歸結於另一變換是比較方便的。

35. 第一個主要的一級變換 考察函數

$$x=\operatorname{sn}^2(u;\,k),\quad y=\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M};\,\lambda\right)。$$

函數 $\operatorname{sn}^2(u;\,k)$的週期是 $2K$、$2iK'$。同樣用 $2L$、$2iL'$ 表明函數 $\operatorname{sn}^2(v;\,\lambda)$的週期。這樣，$y$ 有週期 $2LM$、$2iL'M$。對於第一個一級變換，

$$\begin{cases} iML'=iK'+K, \\ ML=K。\end{cases}$$

考察比 $\frac{y}{x}$。這是用 $2K$、$2iK'$ 作週期的偶橢圓函數。因此它可用 $\operatorname{sn}^2(u;\,k)$的有理函數表示出來。在週期 $2K$、$2iK'$ 的平行四邊形內，函數 $\frac{y}{x}$ 在點 $u=iL'M=iK'+K$ 處具有二級的極點，這是因爲分子 y 在該點有二級的極點，而分母在該處異於零且爲有限。其次，函數 $\frac{y}{x}$ 在點 $u=iK'$ 處具有二階的二級零點，這是因爲在這一點處，分子是有限且異於零，而分母則有二階的極點。根據所證明過的，

$$\frac{y}{x}=\frac{C}{\operatorname{sn}^2(u;\,k)-\operatorname{sn}^2(iK'+K;\,k)}$$

或

$$\frac{y}{x}=\frac{A}{1-k^2x},$$

其中 A 與 C 都是常數。爲了決定這常數，命 $u=K$。由此得

$$1=\frac{A}{1-k^2}。$$

於是
$$A=k'^2$$
就是

$$\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M};\lambda\right)}{\operatorname{sn}^2(u;k)}=\frac{k'^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2(u;k)},\tag{1}$$

卽
$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{k'\operatorname{sn}(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}。$$

現在祇剩下用 k 表示量 M 及 λ 了。將寫出的等式用 u 除，再命 u 趨於零，得

$$\frac{1}{M}=k'。$$

其次，在公式(1)內命 $u=2K+iK'$，得

$$\frac{1}{\lambda^2}=-\frac{k'^2}{k^2}。$$

因之，
$$\lambda=\frac{ik}{k'}。$$

故有
$$\operatorname{sn}\left(k'u;\frac{ik}{k'}\right)=\frac{k'\operatorname{sn}(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)}。$$

同様[或由(1)]可證

$$\operatorname{cn}\left(k'u;\frac{ik}{k'}\right)=\frac{\operatorname{cn}(u;k)}{\operatorname{dn}(u;k)},$$

$$\operatorname{dn}\left(k'u;\frac{ik}{k'}\right)=\frac{1}{\operatorname{dn}(u;k)}。$$

命 k 在由 0 到 1 的區間變化。這點，我們已提過，對應用是最重要的情形。量

$$\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}=\frac{k}{k'}$$

同時將由 0 變化至 ∞。這樣，在本節內我們所得到的公式將具有純虛數的模的雅各比函數變爲模數在區間 $[0,1]$ 內的雅各比函數。

注意，我們在本節內求得的變換公式也可以由 § 22 內引出的

西他函數變換的公式得出。這個附註也屬於下一節。

36. 第二個主要的一級變換 這一變換對應於下邊的關係式:

$$ML=iK',\quad iML'=-K。$$

同時,和上邊一樣,$2K$、$2iK'$ 是函數

$$x=\mathrm{sn}^2(u;\,k)$$

的週期,而 $2ML$、$2iML'$ 是函數

$$y=\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{M};\,\lambda\right)$$

的週期。

再研究比 $$\frac{y}{x}。$$

這是 $\mathrm{sn}^2(u;\,k)$ 的有理函數,在週期 $2K$、$2iK'$ 的四邊形內的點 $u=$ $=iK'$ 處具有二級的零點,因爲這個點是函數 x 的二級極點且在點 $u=K$ 處具有二級的極點。故

$$\frac{y}{x}=\frac{A}{\mathrm{sn}^2(u;\,k)-1}。$$

命 u 趨於零,得

$$\frac{1}{M^2}=-A。$$

因 $$y=\frac{A\,\mathrm{sn}^2(u;k)}{\mathrm{sn}^2(u;\,k)-1},$$

故命 $u=iK'$, 求得 $1=A$。

更用 $-K+iK'$ 代替 u, 得

$$\mathrm{sn}^2(L+iL';\,\lambda)=\frac{\mathrm{sn}^2(K+iK';\,k)}{\mathrm{sn}^2(K+iK';k)-1}$$

或 $$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\dfrac{1}{k^2}}{\dfrac{1}{k^2}-1}。$$

故
$$\lambda=k',\quad M=\frac{1}{i}$$

而我們所得到的結果化爲

(1)
$$\operatorname{sn}(iu;\,k')=i\,\frac{\operatorname{sn}(u;\,k)}{\operatorname{cn}(u;\,k)}。$$

同樣[或根據(1)]可證
$$\operatorname{cn}(iu;\,k')=\frac{1}{\operatorname{cn}(u;\,k)},$$
$$\operatorname{dn}(iu;\,k')=\frac{\operatorname{dn}(u;\,k)}{\operatorname{cn}(u;\,k)}。$$

這些公式的作用在於，它將純虛變數的雅各比函數變爲實變數的雅各比函數。

37. 郎當變換　第一個主要的二級變換，郎當[①](Landen)早在1775年就發現了。對應這一變換有以下的公式：
$$x=\operatorname{sn}^2(u;\,k);\quad 2K,\ 2iK',$$
$$y=\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M};\,\lambda\right);\quad 2ML=K,\ 2iML'=2iK',$$

由此看出，問題是關於函數 x 除以兩個第一週期。

比
$$\frac{y}{x}$$

是 $\operatorname{sn}^2(u;\,k)$ 的有理函數。在週期 $2K$、$2iK'$ 的平行四邊形內這一函數在點 $u=K$ 處具有二級的零點且在點 $u=K+iK'$ 處有二級的極點。

這樣，
$$\frac{y}{x}=C\,\frac{\operatorname{sn}^2(K;\,k)-\operatorname{sn}^2(u;\,k)}{\operatorname{sn}^2(K+iK';\,k)-\operatorname{sn}^2(u;\,k)}$$

或
$$\frac{y}{x}=\frac{A(1-x)}{1-k^2x}。$$

依次命 $u=0$、iK'、$\frac{K}{2}$，得出以下的等式：

① 顯然，郎當並未致力於橢圓函數，他所致力的是橢圓積分的研究。

$$\frac{1}{M^2}=A,\quad \frac{k^2M^2}{\lambda^2}=\frac{A}{k^2},\quad 1=\frac{A\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{K}{2};\,k\right)\mathrm{cn}^2\left(\frac{K}{2};\,k\right)}{\mathrm{dn}^2\left(\frac{K}{2};\,k\right)}。$$

現今可以利用容易導出的公式

$$\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2};\,k\right)=\frac{1}{\sqrt{1+k'}},$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{K}{2};\,k\right)=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}},$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{K}{2};\,k\right)=\sqrt{k'},$$

順便提一下，它們都包含在表 XV 內。由這些公式，最後的方程取以下的形狀：

$$1=\frac{A}{(1+k')^2},$$

故

$$A=(1+k')^2。$$

今由前兩個方程得

$$M=\frac{1}{1+k'},$$

$$\lambda=\frac{k^2}{(1+k')^2}=\frac{1-k'^2}{(1+k')^2}=\frac{1-k'}{1+k'}。$$

故我們所得到的結果化爲

$$\mathrm{sn}\left[u(1+k');\,\frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{(1+k')\mathrm{sn}(u;\,k)\mathrm{cn}(u;\,k)}{\mathrm{dn}(u;\,k)}。$$

其次的公式具以下的形狀：

$$\mathrm{cn}\left[u(1+k');\,\frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1+k')\mathrm{sn}^2(u;\,k)}{\mathrm{dn}(u;\,k)},$$

$$\mathrm{dn}\left[u(1+k');\,\frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1-k')\mathrm{sn}^2(u;\,k)}{\mathrm{dn}(u;\,k)}。$$

請讀者證驗它們。

38. 高斯變換 這一變換是除以兩個第二週期。故它可由一

級變換及郎當變換(除以兩個第一週期)的組合得出。

和前邊一樣,原來的模數是 k, 而變換以後我們得到模數 λ。取舊的和新的週期位置互換的一級變換公式。它們具有以下的形狀:

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(iu;\, k')=i\dfrac{\operatorname{sn}(u;\, k)}{\operatorname{cn}(u;\, k)}, \\ \operatorname{cn}(iu;\, k')=\dfrac{1}{\operatorname{cn}(u;\, k)}, \\ \operatorname{dn}(iu;\, k')=\dfrac{\operatorname{dn}(u;\, k)}{\operatorname{cn}(u;\, k)} \end{cases}$$

及

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(\dfrac{iu}{M};\, \lambda'\right)=i\dfrac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{u}{M};\, \lambda\right)}{\operatorname{cn}\left(\dfrac{u}{M};\, \lambda\right)}, \\ \operatorname{cn}\left(\dfrac{iu}{M};\, \lambda'\right)=\dfrac{1}{\operatorname{cn}\left(\dfrac{u}{M};\lambda\right)}, \\ \operatorname{dn}\left(\dfrac{iu}{M};\, \lambda'\right)=\dfrac{\operatorname{dn}\left(\dfrac{u}{M};\, \lambda\right)}{\operatorname{cn}\left(\dfrac{u}{M};\, \lambda\right)}。 \end{cases}$$

這裏 λ 及 M 暫時是任意的。現今我們必須要求,使(1)及(2)的左邊的函數由郎當變換聯繫起來。就這樣來確定 λ 及 M 。

回想起郎當變換及顧及到,現今的 k' 及 λ' 起着以前的 k 及 λ 的作用,立刻求得

$$\lambda'=\frac{1-k}{1+k}, \quad M=\frac{1}{1+k}$$

及
$$\lambda=\sqrt{1-\lambda'^2}=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}。$$

這樣,兩個參數 λ 及 M 都被確定了。變換的公式具以下形狀:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{iu}{M};\lambda'\right)=\frac{1}{M}\frac{\operatorname{sn}(iu;k')\operatorname{cn}(iu;k')}{\operatorname{dn}(iu;k')},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{iu}{M};\lambda'\right)=\frac{1-(1+k)\operatorname{sn}^2(iu;k')}{\operatorname{dn}(iu;k')},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{iu}{M};\lambda'\right)=\frac{1-(1-k)\operatorname{sn}^2(iu;k')}{\operatorname{dn}(iu;k')}。$$

現今只要再利用關係式(1)及(2)就可以得

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)}=\frac{1}{M}\frac{\operatorname{sn}(u;k)}{\operatorname{cn}(u;k)\cdot\operatorname{dn}(u;k)},$$

$$\frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)}=\frac{\operatorname{cn}^2(u;k)+(1+k)\operatorname{sn}^2(u;k)}{\operatorname{cn}(u;k)\cdot\operatorname{dn}(u;k)},$$

$$\frac{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)}=\frac{\operatorname{cn}^2(u;k)+(1-k)\operatorname{sn}^2(u;k)}{\operatorname{cn}(u;k)\cdot\operatorname{dn}(u;k)}$$

最後的公式具以下的形狀:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1}{M}\frac{\operatorname{sn}(u;k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;k)},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{\operatorname{cn}(u;k)\operatorname{dn}(u;k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;k)},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\lambda\right)=\frac{1-k\operatorname{sn}^2(u;k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u;k)}。$$

我們故意化高斯變換爲郎當變換,爲的是說明在§34最後所作的附註。容易看出,最後這些公式,直接推求更快。

39. 主要的 n 級變換 這些變換是週期之一被數 n 除。得出與這個變換對應的公式的方法在前幾節已充分地說明了。故在這裏我們限定類似情形之一加以分析。關於 n 級變換的全部公式,讀者可在表 XXII 及 XXIII 中找到。我們將研究第二週期除以數 n 的除法變換,且 n 可爲偶數也可爲奇數。

我們取以下的公式:

$$L=\frac{K}{M},\quad L'=\frac{K'}{nM},$$

$$x=\mathrm{sn}(u;\,k),\quad y=\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\,\lambda\right)。$$

比
$$\frac{y}{x}$$
是u的偶函數,而且容易看出,它具有週期 $2K$、$2iK'$, 因

$$\mathrm{sn}(u+2mK+2m'iK';\,k)=(-1)^m\,\mathrm{sn}(u;\,k),$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u+2mK+2m'iK'}{M};\,\lambda\right)=(-1)^m\,\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\,\lambda\right)。$$

因此,
$$\frac{y}{x}$$
是$\mathrm{sn}^2(u;\,k)$的有理函數。在週期 $2K$、$2iK'$ 的基本平行四邊形內被研究的函數在點

$$u=\frac{i\mu K'}{n}\left(\mu=\pm 2,\ \pm 4,\ \cdots,\ \pm 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

處具有一級的零點,而且在點

$$u=\frac{i\nu K'}{n}\left\{\nu=\pm 1,\ \pm 3,\ \cdots,\ \pm\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\right\}$$

處具有一級的極點。由此得

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\,\lambda\right)}{\mathrm{sn}(u;\,k)}=\frac{1}{M}\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\,k)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2ir}{n}K';\,k\right)}}{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\,k)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n}iK';\,k\right)}}。$$

為了確定 M, 命 $u=K$。得

$$M=\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\mathrm{cn}^2\left(\frac{2ir}{n}K';k\right)\cdot\mathrm{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n}iK';\,k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2ir}{n}K';\,k\right)\cdot\mathrm{cn}^2\left(\frac{2r-1}{n}iK';\,k\right)}。$$

注意
$$\frac{\mathrm{sn}(iu;\,k)}{\mathrm{cn}(iu;\,k)}=i\,\mathrm{sn}(u;\,k'),$$

則可將得到的式子改寫成以下的形狀：

$$(2)\qquad M=\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n}K';\ k'\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r}{n}K';\ k'\right)}。$$

爲了確定 λ，在公式（1）內命 $u=K+\frac{iK'}{n}$。因

$$\operatorname{sn}\left(K+\frac{iK'}{n};\ k\right)=\frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)},$$

$$\operatorname{sn}(L+iL';\ \lambda)=\frac{1}{\lambda},$$

故我們得

$$\frac{\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)}{\lambda}=\frac{1}{M}\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1+\dfrac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{2r}{n}K';\ k'\right)}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r}{n}K';\ k'\right)}}{1+\dfrac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{2r-1}{n}K';\ k'\right)}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n}K';\ k'\right)}}.$$

或

$$\lambda=\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{2r-1}{n}K';k'\right)+\operatorname{dn}^2\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n}K';\ k'\right)}{\operatorname{cn}^2\left(\frac{2r}{n}K';\ k'\right)+\operatorname{dn}^2\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r}{n}K';\ k'\right)}。$$

現在要留意

$$\operatorname{cn}^2\alpha+\operatorname{dn}^2\beta\cdot\operatorname{sn}^2\alpha=1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\cdot\operatorname{sn}^2\beta=\frac{\Theta^2(0)\Theta(\alpha+\beta)\Theta(\alpha-\beta)}{\Theta^2(\alpha)\Theta^2(\beta)}。$$

由此關係式得

$$\lambda=\operatorname{dn}\left(\frac{K'}{n};\ k'\right)\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\Theta^3\left(\frac{2r}{n}K'\,|\,\tau'\right)\Theta\left(\frac{2r-2}{n}K'\,|\,\tau'\right)}{\Theta^3\left(\frac{2r-1}{n}K'\,|\,\tau'\right)\Theta\left(\frac{2r+1}{n}K'\,|\,\tau'\right)}。$$

今注意 $$\mathrm{dn}\left(\frac{K'}{n};\,k'\right)=\frac{\Theta\left(\frac{n\pm1}{n}K'\,|\,\tau'\right)\Theta(0\,|\,\tau')}{\Theta\left(\frac{K'}{n}\,|\,\tau'\right)\Theta(K'\,|\,\tau')}。$$

這使模數 λ 具有以下的形狀:

$$\lambda=\left\{\prod_{r=1}^{n}\frac{\Theta\left(\frac{2r}{n}K'\,|\,\tau'\right)}{\Theta\left(\frac{2r-1}{n}K'\,|\,\tau'\right)}\right\}^2$$

這樣無論 n 是偶數或奇數都可。

第七章　關於橢圓積分的補充知識

40．第一種橢圓積分的一般反演公式　研究積分

$$u=\int\frac{dx}{w},$$

其中
$$w^2=x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4\equiv\varphi(x)$$
是沒有重根的四次多項式。假定這一多項式至少有一個根是已知的，則如同前面看到的，對於變數 x 施行某一個線形變換可將積分寫成衛爾斯脫拉斯標準形狀，其次它的反演就可直接藉助於函數 $\wp$ 來實現。

本節中我們將說明，若多項式 $\varphi(x)$ 的任何一個根也不知道[①]，則所研究積分的反演將如何產生。在那些情形下，卽多項式 $\varphi(x)$ 的係數是不確定的數而爲某些參數，例如爲任意常數時，反演問題的解非常重要，像這樣的情形常伴隨在力學中。

設
$$x=-a_1-y,$$
則 w^2 將具以下的形狀：
$$w^2=y^4+6b_2y^2+4b_3y+b_4\equiv\psi(y),$$
其中
$$b_2=a_2-a_1^2=-S,$$
$$b_3=3a_1a_2-2a_1^3-a_3=-T,$$
$$b_4=a_4-4a_1a_3+6a_1^2a_2-3a_1^4。$$

導出多項式 $\varphi(x)$ 的不變式 g_2、g_3，我們已經知道，它們等於[②]

---

① 假定 $w^2=\varphi(x)$ 是三次多項式，則我們的問題用初等方法可以解決。所我們要研究四次多項式的情形。

② 這裏要注意 $a_0=1$。

$$
(1)\qquad \begin{cases} g_2 = a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \\ g_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \end{cases}
$$

列出方程

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0,$$

它的根用 e_1、e_2、e_3 表示。這一方程是下邊每一方程的豫解式(резольвент)

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(y) = 0$$

[阿倫好爾脫赫 (Aronhold) 豫解式]。事實上，假定用 x_0、x_1、x_2、x_3 表示方程

$$(2)\qquad \varphi(x) = 0$$

的根，而用 y_0、y_1、y_2、y_3 表示方程

$$(3)\qquad \psi(y) = 0$$

的對應根，則

$$x_k = -a_1 - y_k \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

於是，如代數學教程內所證①，下邊的等式成立：

$$
(4)\qquad \begin{cases} y_0 = \sqrt{S-e_1} + \sqrt{S-e_2} + \sqrt{S-e_3}, \\ y_1 = \sqrt{S-e_1} - \sqrt{S-e_2} - \sqrt{S-e_3}, \\ y_2 = -\sqrt{S-e_1} + \sqrt{S-e_2} - \sqrt{S-e_3}, \\ y_3 = -\sqrt{S-e_1} - \sqrt{S-e_2} + \sqrt{S-e_3}. \end{cases}
$$

我們再提出一個容易驗證的關係式

$$(5)\qquad 4S^3 - g_2S - g_3 = T^2,$$

這在後邊是有用處的。

我們導出函數 $\wp(u; g_2, g_3)$，它的構成，祇需要多項式 $\varphi(x)$ 的

① 例如，可參閱蘇什克維奇(А. К. Сушкевич)的"高等代數教程"(Курс высшей алгебры) (202—205 頁, 1941 第四版)。

不變式 g_2、g_3。關係式(5)指出，有適合於

$$S=\wp(v),\quad T=-\wp'(v) \tag{6}$$

的 v 存在。

現今我們可將方程(3)的根的公式(4)化爲以下的形狀：

$$y_0=f(v),\ y_1=f(v+2\omega_1),\ y_2=f(v+2\omega_2),\ y_3=f(v+2\omega_3)$$

其中
$$f(v)=\frac{\sigma_1(v)+\sigma_2(v)+\sigma_3(v)}{\sigma(v)}。$$

我們已得出，方程的超越形式的解，卽用橢圓函數表出的解。

爲了今後的目的，變換量 $f(v)$ 爲另一形狀，是有用的。爲此目的，注意：

$$f(u)=\frac{\sigma_1(u)+\sigma_2(u)+\sigma_3(u)}{\sigma(u)}$$

是以 4ω、$4\omega'$ 作週期的橢圓函數。在週期 4ω、$4\omega'$ 的平行四邊形內，它具有簡單極點 0、2ω、$2\omega'$、$2\omega+2\omega'$。相當的留數等於 3、-1、-1、-1。容易看出，與 $f(u)$ 具有相同的週期的橢圓函數

$$2\zeta\left(\frac{u}{2}\right)-\zeta(u),$$

也具有相同的性質。

故
$$\frac{\sigma_1(u)+\sigma_2(u)+\sigma_3(u)}{\sigma(u)}=2\zeta\left(\frac{u}{2}\right)-\zeta(u)+C,$$

其中 C 是常數。容易求出這一常數。事實上，在點 $u=0$ 的鄰域內有

$$2\zeta\left(\frac{u}{2}\right)-\zeta(u)=\frac{3}{u}+Au^3+\cdots$$

及

$$\frac{\sigma_1(u)+\sigma_2(u)+\sigma_3(u)}{\sigma(u)}=\frac{3+\alpha u^2+\cdots}{u+\beta u^5+\cdots}=\frac{3}{u}+\alpha u+\cdots;$$

我們看出 $C=0$（以及 $\alpha=0$，但這對於我們無任何價值）。

這樣，
$$f(u)=2\zeta\left(\frac{u}{2}\right)-\zeta(u)。$$

今利用函數 ζ 的加法定理。由這一定理得

$$\zeta(u)=2\zeta\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\wp'\left(\frac{u}{2}+h\right)-\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp\left(\frac{u}{2}+h\right)-\wp\left(\frac{u}{2}\right)}=$$

$$=2\zeta\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}$$

即

$$f(u)=-\frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}。$$

精緻的關係式

$$\frac{\sigma_1(u)+\sigma_2(u)+\sigma_3(u)}{\sigma(u)}=-\frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}$$

是屬於考瓦萊夫斯卡婭(C. B. Ковалевская)的。

這樣，方程(3)的根可寫成以下的形狀：

$$y_0=-\frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)},\quad y_k=-\frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{v}{2}+\omega_k\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}+\omega_k\right)}\qquad (k=1,2,3)。$$

到現在爲止我們的研究還祇是輔助的性質。現今開始解反演的問題。我們在這裏所注意的解是以下列恆等式爲根據：

$$(7)\quad \left[\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp\left(u+\frac{c}{2}\right)\right]^2=\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp'(c)}{\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp(c)}\right]^2-\right.$$

$$\left.-3\wp(c)\right\}^2+2\wp'(c)\frac{\wp'\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp'(c)}{\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp(c)}+g_2-12[\wp(c)]^2。$$

爲了驗證這一恆等式，可利用函數 $\wp$ 的加法定理。由該定理有

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp'(c)}{\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp(c)}\right]^2-3\wp(c)=$$

$$=\left\{\wp\left(u+\frac{c}{2}\right)-\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)\right\}+2\left\{\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp(c)\right\}。$$

故我們的恆等式和下邊的等式等價：

$$2\left\{\wp(c)-\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)\right\}\left\{\wp\left(u+\frac{c}{2}\right)-\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)\right\}-$$

$$-2\left[\wp(c)-\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)\right]^2=\wp'(c)\frac{\wp'\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp'(c)}{\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp(c)}-$$

$$-6[\wp(c)]^2+\frac{1}{2}g_2。$$

或

$$-\frac{1}{2}\frac{\left[\wp'\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp'(c)\right]^2}{\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp(c)}-$$

$$-2\left\{\wp(c)-\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)\right\}\left\{2\wp(c)+\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\wp'(c)\left[\wp'\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp'(c)\right]}{\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp(c)}-6[\wp(c)]^2+\frac{1}{2}g_2。$$

這一式可寫成以下的形狀：

$$-\frac{1}{2}\frac{\wp'^2\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp'^2(c)}{\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)-\wp(c)}+2[\wp(c)]^2+$$

$$+2\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)\wp(c)+2\left[\wp\left(u-\frac{c}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{2}g_2,$$

根據函數 $\wp$ 的微分方程立刻知道這一恆等式爲眞。

注意，在恆等式(7)內函數$\wp$的不變式g_2、g_3是前所導出的量(1)。此外，由等式(6)所確定的量v以替代c，最後再命

$$y=\frac{1}{2}\frac{\wp'\left(u-\frac{v}{2}\right)-\wp'(v)}{\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)-\wp(v)}。$$

於是恆等式(7)取下邊的形狀：

$$\left[\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)-\wp\left(u+\frac{v}{2}\right)\right]^2=$$

$$=y^4-6\wp(v)y^2+4\wp'(v)y+g_2-3[\wp(v)]^2。$$

由等式(6)及量S、T的定義，

$$-\wp(v)=b_2,\quad \wp'(v)=b_3。$$

此外，因為 $$g_2=b_0b_4-4b_1b_3+3b_2^2,$$

及 $$b_0=1,\quad b_1=0,$$

故 $$g_2-3[\wp(v)]^2=g_2-3b_2^2=b_4。$$

這樣，我們就得出

$$\left[\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)-\wp\left(u+\frac{v}{2}\right)\right]^2=y^4+6b_2y^2+4b_3y+b_4。$$

這一等式的右邊是w^2。因此我們的結果構成這樣：若命

$$x=-a_1-\frac{1}{2}\frac{\wp'\left(u-\frac{v}{2}\right)-\wp'(v)}{\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)-\wp(v)},$$

則 $$w=\wp\left(u+\frac{v}{2}\right)-\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)。$$

今注意，由函數$\wp$按行列式的形式的加法定理，下邊等式成立：

$$\frac{\wp'\left(u-\frac{v}{2}\right)-\wp'(v)}{\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)-\wp(v)}=-\frac{\wp'\left(u+\frac{v}{2}\right)+\wp'\left(u-\frac{v}{2}\right)}{\wp\left(u+\frac{v}{2}\right)-\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)}。$$

故 $$x=-a_1+\frac{1}{2}\frac{\wp'\left(u+\frac{v}{2}\right)+\wp'\left(u-\frac{v}{2}\right)}{\wp\left(u+\frac{v}{2}\right)-\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)}=f(u,v)。$$

其次注意，當 $u=0$ 時則函數 $f(u, v)$ 取以下的值

$$-a_1-f(v),$$

這裏邊 $f(v)$ 是先前導出的函數，而且在我們的所有討論中可以用 $v+2\omega_k$ 代替 v $(k=1, 2, 3)$。

最後，注意

$$\frac{dx}{du}=\frac{\partial}{\partial u}f(u, v)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\wp'\left(u+\frac{v}{2}\right)+\wp'\left(u-\frac{v}{2}\right)}{\wp\left(u+\frac{v}{2}\right)-\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)}=$$

$$=\wp\left(u+\frac{v}{2}\right)-\wp\left(u-\frac{v}{2}\right)=w,$$

故 $$u=\int\frac{dx}{w}。$$

最後的等式指出，函數

$$x=f(u, v)$$

是反演問題的解，而且當 $u=0$ 時變成方程(2)的根 x_0。函數

$$f(u, v+2\omega_k) \quad (k=1, 2, 3)$$

也給與反演問題的解，且當 $u=0$ 時變成已知方程其餘的根。

41. 具有實不變式的函數 $\wp(u)$ 設不變式 g_2、g_3 是實數，則多項式

$$4z^3-g_2z-g_3$$

的三根 e_1、e_2、e_3 或全是實根，或有一實根，而其餘二者是共軛複根。

若判別式是正數，即

$$g_2^3-27g_3^2>0,$$

則第一情形成立；在這一情形中，我們將這些根附以足碼，使

$$e_1 > e_2 > e_3。$$

應當注意,假設所有的根 e_i 彼此不相同,就表明判別式異於零。

若判別式是負數,則第二情形成立。

這些事實可直接用下邊的公式推出來:

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2。$$

帶有實不變式的函數 $\wp(u)$,對於判別式的任意符號在實軸上祇取實數值。這可由以下事實推出:在不變式爲實數的情形,則展開式

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3^2}{28}u^4 + \cdots$$

的全體係數都是實數。

同樣,函數 $\wp(u)$ 在虛軸上也取實數值,由下邊的關係式卽可看出:

(1) $$\wp(iu;\, g_2,\, g_3) = -\wp(u;\, g_2,\, -g_3)。$$

今將引出函數 $\wp(u)$ 的週期 $2\omega_1$、$2\omega_3$ 用不變式表出的式子。

從判別式爲正數的情形開始。由公式

$$u = \int_{\wp}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

(其中根號當 $x > e_1$ 時,取它的算術值)推出:當 $\wp$ 由 ∞ 縮小到 e_1 時,量 u 單調地由 0 增大到 ω_1。因之,

(2) $$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}。$$

今取函數 $\wp(u;\, g_2,\, -g_3)$ 且用 $2\tilde{\omega}_1$、$2\tilde{\omega}_3$ 表明它的週期。多項式

$$4x^3 - g_2x + g_3$$

的根,按遞減的順序排列,將爲

$$\tilde{e}_1 = -e_3,\quad \tilde{e}_2 = -e_2,\quad \tilde{e}_3 = -e_1。$$

同時,關係式(1)示明

(3) $$\tilde{\omega}_1 = \frac{\omega_3}{i},\quad \tilde{\omega}_3 = -\frac{\omega_1}{i}。$$

與公式(2)同樣可寫出

$$\widetilde{\omega}_1=\int_{\tilde{e}_1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x+g_3}}。$$

故

(4) $$\omega_3=i\int_{-e_3}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x+g_3}}。$$

這樣，週期 $2\omega_1$、$2\omega_3$ 經過不變式 g_2, g_3 用積分形式表示出來了。我們看出，$2\omega_1$ 是實數，而 $2\omega_3$ 是純虛數。這表明，在研究判別式爲正數的情形中，週期平行四邊形是矩形。

利用衞爾斯脫拉斯函數及雅各比函數間的關係，可寫出

$$\omega=\sqrt{\lambda}\,K,$$

$$\omega'=\sqrt{\lambda}\,K'$$

其中 $$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},\quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}>0。$$

今轉到判別式是負數的情形。

這裏由類似的理由得出公式

(5) $$\omega_2=\int_{e_2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}。$$

再取函數 $\wp(u;\,g_2,\,-g_3)$。保持以前的記號，得

(6) $$\frac{\widetilde{\omega}_2}{i}=\int_{-e_2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}。$$

今注意等式(3)，以及

$$\omega_2=-\omega_1-\omega_3,$$

$$\widetilde{\omega}_2=-\widetilde{\omega}_1-\widetilde{\omega}_3。$$

我們求得

$$\omega_1+\omega_3=-\omega_2,$$

$$\omega_1-\omega_3=-\frac{\widetilde{\omega}_2}{i}。$$

這樣把量(5)、(6)相加及由(5)內減去(6)卽得出週期 $2\omega_1$、$2\omega_3$。我們看出，在判別式是負數的情形，週期 $2\omega_1$、$2\omega_3$ 是共軛複數，故得出基本平行四邊形是菱形。

在負數判別式的情形中，週期可用勒讓得標準橢圓積分的形式表出。爲此，必須命

$$e_2-e_3=\rho(\cos\psi+i\sin\psi),$$

其中 $\rho>0$, $0<\psi<\pi$。在這一情形中，請讀者檢驗

$$\omega_2\sqrt{\rho}=K,$$

$$\frac{\tilde{\omega}_2\sqrt{\rho}}{i}=K',$$

其中

$$k^2=\sin^2\frac{\psi}{2}。$$

42. 在實數情形下將橢圓積分化爲雅各比標準型　我們將研究積分

$$\int R(z,\ w)dz, \tag{1}$$

其中 R 表明自己變數的有理函數及

$$w^2=a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4\equiv f(z)。$$

這裏我們假設，係數 a_i 是實數，$a_0\neq0$，同時，多項式 $f(z)$（沒有重根）在數軸的某些區間爲正，且我們將限定，z 在這樣的區間內變化。這樣，w 祇具實數值，所以，如果函數 $R(z,\ w)$ 的係數是實數，則積分（1）也將是實數。這一情形（我們叫它做實數情形）希望藉助於實數變換將積分化成標準形狀。類似的變換是本節研究的對象。

首先注意，多項式分解爲一次因子後再集合起來，可使多項式 $f(z)$ 具有以下形狀：

$$f(z)=a_0(z^2+2\lambda z+\mu)(z^2+2\rho z+\sigma),$$

其中全體係數 a_0、λ、μ、ρ、σ 仍然是實數。假定多項式 $f(z)$ 的四個根不完全是實數，則這一分解是唯一的，因爲至少二次三項式之一必須具有共軛根。假定全體根都是實數，則需要的分解式不是唯一的。這時我們挑選第一個二次三項式的根大於第二個三項式

的根。

今憑 $\lambda=\rho$ 或 $\lambda\neq\rho$ 而可有二種情形。

若 $\lambda=\rho$，則我們命

$$z+\lambda=t$$

且 $f(z)$ 具以下形狀

$$f(z)=a_0(t^2+\alpha)(t^2+\beta),$$

其中 α 及 β 是實數。

若 $\lambda\neq\rho$，則用下公式導入變數 t 以代替 z:

$$z=\frac{pt+q}{t+1},$$

其中 p 及 q 是待定的數。多項式 $f(z)$ 具以下形狀:

$$f(z)=\frac{a_0}{(t+1)^4}\{(pt+q)^2+2\lambda(pt+q)(t+1)+\mu(t+1)^2\}\times$$
$$\times\{(pt+q)^2+2\rho(pt+q)(t+1)+\sigma(t+1)^2\}。$$

我們需要大括弧內的二次三項式不包含變數 t 的一次項。這可用以下二方程決定 p 及 q:

$$(2)\qquad\begin{cases}pq+\lambda(p+q)+\mu=0,\\ pq+\rho(p+q)+\sigma=0。\end{cases}$$

我們將證明，解這兩個方程則可得出 p 及 q 的實數值。由方程(2)，得

$$p+q=-\frac{\mu-\sigma}{\lambda-\rho},$$

$$pq=-\frac{\lambda\sigma-\mu\rho}{\lambda-\rho}。$$

故 p 及 q 是二次方程

$$X^2+\frac{\mu-\sigma}{\lambda-\rho}X-\frac{\lambda\sigma-\mu\rho}{\lambda-\rho}=0$$

的根。這一方程的判別式等於

$$D=\left(\frac{\mu-\sigma}{\lambda-\rho}\right)^2+4\frac{\lambda\sigma-\mu\rho}{\lambda-\rho}=\frac{(\mu-\sigma)^2+4(\lambda-\rho)(\lambda\sigma-\mu\rho)}{(\lambda-\rho)^2}。$$

用 a、b 表明多項式

$$z^2+2\lambda z+\mu$$

的根，而用 c、∂ 表明多項式

$$z^2+2\rho z+\sigma$$

的根。則

$$\mu=ab,\quad 2\lambda=-a-b,$$
$$\sigma=c\partial,\quad 2\rho=-c-\partial。$$

故

$$D=\frac{(ab-c\partial)^2+(c+\partial-a-b)\{(c+\partial)ab-(a+b)c\partial\}}{(\lambda-\rho)^2}=$$
$$=\frac{(a-c)(a-\partial)(b-c)(b-\partial)}{(\lambda-\rho)^2}。$$

若多項式 $f(z)$ 的根全爲實數，則所得的式爲正數，因爲由已知條件，數 a、b 大於 c、∂。量 D 當 $f(z)$ 的根不全是實數時也是正數。這樣，假定 c、∂ 是實數，而 a、b 非實數，則

$$(a-c)(b-c)=|a-c|^2,$$
$$(a-\partial)(b-\partial)=|a-\partial|^2。$$

假定全體根都不是實數，則

$$(a-c)(b-\partial)=|a-c|^2,$$
$$(a-\partial)(b-c)=|a-\partial|^2。$$

這樣，D 永遠是正數。可見，p、q 是實數，而我們已證明，由實係數分式的一次變換，可化我們的積分(1)成爲以下形狀：

$$\int R[t,\sqrt{\pm(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}]dt,$$

其中 R 表明某一個新的有理函數。我們已假定函數 $f(z)$ 在數軸的某些區間爲正。式

$$\pm(t^2+\alpha)(t^2+\beta)$$

因而也有這個性質。故根式

$$y=\sqrt{\pm(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}$$

祇可能取以下各型:

(I) $$y=\sqrt{(a^2-t^2)(b^2-t^2)},$$

(II) $$y=\sqrt{(a^2-t^2)(t^2-b^2)},$$

(III) $$y=\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)},$$

(IV) $$y=\sqrt{(t^2-a^2)(b^2+t^2)},$$

(V) $$y=\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}。$$

其中 a、b 表明正數。在這些之中的每一個情形,化成標準型,不發生任何困難。相當的公式包含在表 XXVII 內。

這裏我們作爲一例而研究型 I 。如是,命

$$y=\sqrt{(a^2-t^2)(b^2-t^2)},$$

且 $$a^2>b^2。$$

能夠適當地依照 $t^2<b^2$ 或 $t^2>a^2$ 而分爲二種情形。不等式 $b^2<$ $<t^2<a^2$ 應除外,因爲由它確定的 y 的數值不是實數。

若 $$t^2<b^2,$$

則令 $$t=bx, \quad k^2=\frac{b^2}{a^2}。$$

這就給出 $$y=ab\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}。$$

若 $$t^2>a^2,$$

則命 $$t=\frac{a}{x}, \quad k^2=\frac{b^2}{a^2}。$$

這就給出 $$y=\frac{a^2}{x^2}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}。$$

在兩種情形中,x 都在區間 $[-1,1]$ 內變化,且以命

$$x=\operatorname{sn}(u;k)$$

爲便利。如此 u 將有區間 $[-K,K]$。

43. 完全橢圓積分作爲超幾何函數 取完全橢圓積分的三角的形式

$$(1)\qquad K={}'\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$(2)\qquad E={}'\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

且假定 $|k^2|<1$。

在這樣的假設下，我們可以把被積分函數展成變數 k^2 的升冪級數：

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}k^{2r}\sin^{2r}\varphi,$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=1-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r-2)!}{2^{2r-1}(r-1)!\,r!}k^{2r}\sin^{2r}\varphi。$$

把這些式子積分，且注意

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r}\varphi\cdot d\varphi=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(r+1)}=\frac{\pi}{2^{2r+1}}\,\frac{(2r)!}{(r!)^2},$$

則得出下邊的展開式：

$$K=\frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!\,(2r)!}{2^{4r}(r!)^4}k^{2r},$$

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r-2)!\,(2r)!}{2^{4r-1}(r-1)!\,(r!)^3}k^{2r}\right\}。$$

今回憶超幾何級數

$$F(a,b,c;x)=1+\frac{a\cdot b}{c\cdot 1}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 1\cdot 2}x^2+\cdots。$$

則不難驗證，這一級數在

$$a=b=\frac{1}{2},\quad c=1,\quad x=k^2$$

時，變化為 $\frac{2}{\pi}K$，而在

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=1,\quad x=k^2$$

時變化為 $\frac{2}{\pi}E$。這樣，

$$(1^{\text{bis}})\qquad K=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1;\ k^2\right),$$

$$(2^{\text{bis}})\qquad E=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1;\ k^2\right)。$$

這些式子限定於

$$|k^2|<1。$$

有名的超幾何級數的變換給出橢圓積分 K、E 對於變數 k^2 平面的其他部份的式子。不談這些變換，我們轉到問題的另一面，卽談與共形寫像的關係。

在複數 w 平面上已知有限的領域，命其境界爲若干個圓弧構成。命 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 表明這一多邊形的頂點，且 $\pi\delta_1, \pi\delta_2, \cdots, \pi\delta_n$ 爲其相當的內角。假設要將這一多角形共形寫像到複變數 z 的上半平面上。此外，假設無限遠點是頂點 c_n 的像，把多角形其餘的頂點所變到的實軸上的點，各叫做 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$。

在這樣的情形下，像在複變數函數論教程內所證明的①，函數 $w=w(z)$ 滿足於微分方程

$$\{w,\ z\}=2I(z),$$

其中

$$(3)\qquad 2I(z)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1-\delta_r^2}{(z-a_r)^2}+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{A_r}{z-a_r},$$

且 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 表明用以下的關係式

$$(4)\qquad \sum_{r=1}^{n-1}A_r=0,$$

$$(5)\qquad \sum_{r=1}^{n-1}A_ra_r+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}(1-\delta_r^2)=\frac{1}{2}(1-\delta_n^2)$$

所聯結的常數，而 $\{w, z\}$ 就是所謂 w 關於 z 的什瓦爾次(Schwarz)導數(或什瓦爾次式)，是由等式

---

① 例如，可參閱 Courant: "幾何函數論" ОНТИ, 1934, 第七章。

$$\{w, z\}=\frac{w'''}{w'}-\frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2,$$

所確定的。這樣，爲了求 w，我們就有三級的微分方程。但，問題的解可以化爲某一二級微分方程的積分。卽方程

$$\{w, z\}=2I(z) \tag{6}$$

的每一解是微分方程

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2}+I\Omega=0 \tag{7}$$

的兩個線性無關的特積分之比。

二角形的情形是無足輕重的。事實上，在這一情形中，這兩頂點祇有一個被在有限距離內的點表示，它可以取爲點 $z=0$。這樣，就有

$$2I(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1-\delta^2}{z^2}+\frac{A}{z}。$$

條件（4）化成等式 $A=0$，而條件（5），容易看出，自然地滿足。我們的方程（6）將具有以下形狀：

$$\{w, z\}=\frac{1}{2}\,\frac{1-\delta^2}{z^2},$$

而方程（7）則可寫爲形式：

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1-\delta^2}{z^2}\Omega=0。$$

這一方程的通積分是

$$\Omega=C_1 z^{\frac{1+\delta}{2}}+C_2 z^{\frac{1-\delta}{2}}。$$

這樣，所要求的共形寫像的函數將爲

$$w=\frac{A_1 z^{\frac{1+\delta}{2}}+A_2 z^{\frac{1-\delta}{2}}}{B_1 z^{\frac{1+\delta}{2}}+B_2 z^{\frac{1-\delta}{2}}}$$

或

$$w=\frac{A_1 z^{\delta}+A_2}{B_1 z^{\delta}+B_2}。$$

以下的以及對於我們最有意義的情形將是具有三個頂點的多

角形。無限遠點是其中之一的像。如取 $z=0$, $z=1$ 爲另外兩個頂點的像,則我們將有

$$2I(z)=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1-\delta_1^2}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{1-\delta_2^2}{(z-1)^2}。$$

同時,條件(4)及(5)具有以下的形式:

$$A+B=0,$$

$$A\cdot 0+B\cdot 1=\frac{1}{2}(1-\delta_3^2)-\frac{1}{2}(1-\delta_1^2)-\frac{1}{2}(1-\delta_2^2)。$$

這樣,
$$-A=B=\frac{1}{2}(\delta_1^2+\delta_2^2-\delta_3^2-1)。$$

我們得出方程

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2}+\Omega\left\{\frac{1-\delta_1^2}{4z^2}+\frac{1-\delta_2^2}{4(z-1)^2}-\frac{\delta_1^2+\delta_2^2-\delta_3^2-1}{4z}+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta_1^2+\delta_2^2-\delta_3^2-1}{4(z-1)}\right\}=0。$$

今設

$$(8)\qquad \begin{cases}\delta_1^2=(1-c)^2,\\ \delta_2^2=(c-a-b)^2,\\ \delta_3^2=(a-b)^2。\end{cases}$$

此外,依照下公式用函數 y 代替 Ω:

$$\Omega=z^{\frac{c}{2}}(z-1)^{\frac{a+b-c+1}{2}}\cdot y。$$

這時對於 y 得出方程

$$z(1-z)y''+[c-(a+b+1)z]y'-aby=0。$$

這是一個微分方程,它被具有參數 a、b、c 的超幾何函數所滿足。

前邊我們已看到

$$K=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right),$$

其中 $\lambda=k^2$。同樣

$$K'=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-\lambda\right)。$$

故 K 是以下方程的特積分

$$(9)\qquad \lambda(1-\lambda)y''-(2\lambda-1)y'-\frac{1}{4}y=0$$

而另一特積分是 K'。也就是說，函數

$$(10)\qquad w\equiv\frac{\alpha iK'+\beta K}{\gamma iK'+\delta K}=\varphi(\lambda)$$

將 w 平面上的某三角形寫像爲 λ 平面的上半平面。所說的三角形的角全等於零，這一點容易由公式(8)推出。公式(10)可表示如下型：

$$\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}=\varphi(\lambda)$$

並取 $\alpha=1$、$\delta=1$、$\beta=0$、$\gamma=0$、則我們不難求出 τ 平面上的三角形的頂點在 $\tau=0$、$\tau=1$、$\tau=\infty$ 處。我們求得 § 22 內所研究過的領域 D_2 的右邊一半。

本節的最後，我們提出請注意，與(9)等價的微分方程是勒讓得已經求出來的。就是勒讓得曾證明，K、K' 滿足於方程

$$\frac{d}{dk}\left(kk'^2\frac{dy}{dk}\right)=ky,$$

而這一方程與(9)等價。爲了求出完全橢圓積分所滿足的微分方程，這些積分預先展爲冪級數是毫無必要的。最簡單的方法是利用對參數的微分。

由公式(2)得

$$\frac{dE}{dk}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\,dt=\frac{E-K}{k}。$$

其次有

$$\frac{dK}{dk}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2 t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt。$$

這裏命

$$\frac{k'^2}{1-k^2\sin^2 t}=1-k^2\sin^2\varphi。$$

則

$$\sin t=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \cos t=\frac{k'\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

簡單的計算以後,我們得

$$k\frac{dK}{dk}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{k'^2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{E}{k'^2}-K。$$

由關係式

$$\frac{dE}{dk}=\frac{E-K}{k},$$

$$k\frac{dK}{dk}=\frac{E}{k'^2}-K$$

內消去 E。這就得出等式

$$\frac{d}{dk}\left(kk'^2\frac{dK}{dk}\right)=kK。$$

請作為練習,用類似的方法覆驗,E 及 $E'-K'$ 是方程

$$k'^2\frac{d}{dk}\left(k\frac{dy}{dk}\right)+ky=0$$

的解。所得的全積分關於模數的導數的式子可以證明勒讓得關係式

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}。$$

事實上,藉助於微分,我們相信左邊是常數。要確定這個常數,祇求左邊當 $k\to 0$ 時的極限就夠了。

44. 按給定的模數 k 計算 h 設量 $h=e^{\pi i\tau}$ 是已知的,則可構造收斂很快的因之對於計算就很方便的西他級數。但在實踐方面,已知的常常不是量 h 而是模數 k,因而當計算時首先發生求量 h 的問題。在 § 43 內我們已看到,關於模數 k 及補助模數 k' 的第一種完全橢圓積分可表為超幾何級數的形狀。原則上,用這些級數可求得 K、K'。因之得出 $\tau=\frac{iK'}{K}$ 及 h。但這些級數對於計算是很少適用。衛爾斯脫拉斯在假設

$$\left|\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right|<1 \tag{1}$$

之下,指出了極方便的計算方法。量

(2) $$l=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

是依賴於$\sqrt{k'}$的，我們將經常地認作$\sqrt{k'}$的實數部份是正的。在實際方面最重要的情形是 $0<k<1$。在這一情形中，也將有 $0<k'<1$，且條件(1)將必定滿足。先取公式

$$k'=\frac{\vartheta_0^2(0|\tau)}{\vartheta_3^2(0|\tau)},$$

我們遇到它並不祇一次了。根據這一公式有

$$\sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}$$

且 $$l=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{\vartheta_3(0|\tau)-\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)+\vartheta_0(0|\tau)}。$$

回想起 $$\vartheta_3(0|\tau)=1+2h+2h^4+2h^9+\cdots,$$
$$\vartheta_0(0|\tau)=1-2h+2h^4-2h^9+\cdots,$$

得出關係式 $$l=\frac{2h+2h^9+2h^{25}+\cdots}{1+2h^4+2h^{16}+\cdots}。$$

它可寫成以下的形式:

(3) $$l^4=\frac{\vartheta_2^4(0|4\tau)}{\vartheta_3^4(0|4\tau)}。$$

這一方程祇在符號上與方程

$$k^2=\frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}$$

不同。但在§29內我們已見到，由最後方程，量 $h=e^{\pi i\tau}$ 是在複變數 $\lambda=k^2$ 平面內(這一平面由點 $\lambda=1$ 沿實數軸到點 $\lambda=\infty$ 作切斷)是 k^2 的正則函數。

使用這一結果到我們的方程(3)，得出結論：量 $h^4=e^{4\pi i\tau}$ 在圓 $|l|<1$ 內是 l^4 的正則函數。故下邊的展開式成立：

$$h^4=A_1l^4+A_2l^8+A_3l^{12}+\cdots$$

或 $$h=C_1l+C_2l^5+C_3l^9+\cdots$$

不難計算這一級數的前幾項的係數。結果具以下的形式:

$$h=\frac{1}{2}l+2\left(\frac{1}{2}l\right)^5+15\left(\frac{1}{2}l\right)^9+150\left(\frac{1}{2}l\right)^{13}+\cdots。$$

把這一級數應用到實際是很方便的,因爲通常祇取最初的兩項就夠了。

45. 算術-幾何平均值 已知兩個正數 a 及 b 且命 $a>b$。假設

$$a_1=\frac{a+b}{2},\qquad b_1=\sqrt{ab},$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_1b_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則由這 a 與 b 作出兩個數列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots;\quad b_1, b_2, b_3, \cdots,$$

其中的根號經常取算術值。容易證明,當 $n\to\infty$ 時,量 a_n、b_n 趨於共同的極限。這個極限叫作數 a、b 的算術-幾何平均值,並用符號 $\mu(a, b)$ 表示。高斯首先研究了它。

爲了證明,我們注意,以下的不等式成立:

(1) $$a_n>b_n,$$

(2) $$a_{n+1}<a_n,\quad b_{n+1}>b_n。$$

由(2)及(1)下列二極限值存在:

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n,\quad \beta=\lim_{n\to\infty}b_n,$$

且

$$\alpha\geqslant\beta。$$

由極限 α、β 的存在推出

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

或

$$\alpha=\beta。$$

現在來求量 $\mu(a, b)$。爲此目的,取表示高斯變換的基本關係式:

(3)
$$\operatorname{sn}\left(u;\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{(1+k)\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k};\ k\right)}{1+k\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{1+k};\ k\right)}。$$

假設
$$\operatorname{sn}\left(u;\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\sin\varphi,$$
$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k};\ k\right)=\sin\psi,$$

則
$$u=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\sin^2 t}},$$
$$\frac{u}{1+k}=\int_0^{\psi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

可寫出

(4)
$$\frac{1}{1+k}\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\sin^2 t}}=\int_0^{\psi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

其中 φ 及 ψ 是以下由(3)所推出的關係式連結的:
$$\sin\varphi=\frac{(1+k)\sin\psi}{1+k\sin^2\psi}。$$

研究當 $\psi=\frac{\pi}{2}$ 時,因此 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 時的特殊情形。等式(4)取以下的形式:

(5)
$$\frac{1}{1+k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\sin^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}。$$

命
$$k=\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n},$$

則
$$1+k=\frac{a_n}{a_{n+1}},\quad k^2=1-\frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2},\quad \frac{4k}{(1+k)^2}=1-\frac{b_n^2}{a_n^2}$$

而(5)可寫成以下的形狀:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{a_n^2\cos^2 t+b_n^2\sin^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{a_{n+1}^2\cos^2 t+b_{n+1}^2\sin^2 t}}。$$

我們將看到，量

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}}$$

與 n 無關，這就意味着，當 $n \to \infty$ 時它等於自己的極限。因此，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{\mu(a, b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}},$$

即

$$\mu(a, b) = \frac{\pi}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}}。$$

第八章　幾個共形寫像

46．矩形在半平面上的共形寫像　在 u 平面上假定用點

$$u=a,\quad a+bi,\quad -a+bi,\quad -a$$

作頂點的矩形爲已知，其中 a, b 是某二個正數。現今要將這一矩形共形寫像在 z 平面的上半平面。由複變函數論知道，所求的寫像函數(祇談有限的點)，直到境界都連續。

若我們用 $c_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 表示作爲矩形頂點之像的實數軸上的四點，則由什瓦爾次-克雷斯陶非爾(Schwarz-Crystoffel)著名的公式，所求的寫像函數可寫成以下的形狀:

$$C'u+C''=\int_0^z\frac{dx}{\sqrt{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)}}。$$

如果已知矩形的三個境界點的像，則根據一般定理就可以完全定出寫像的函數。我們將要求點 $u=-a$、0、a (圖 12) 與點 $z=-1$、0、1 相當。用這些要求可確定常數中的三個。我們就得出

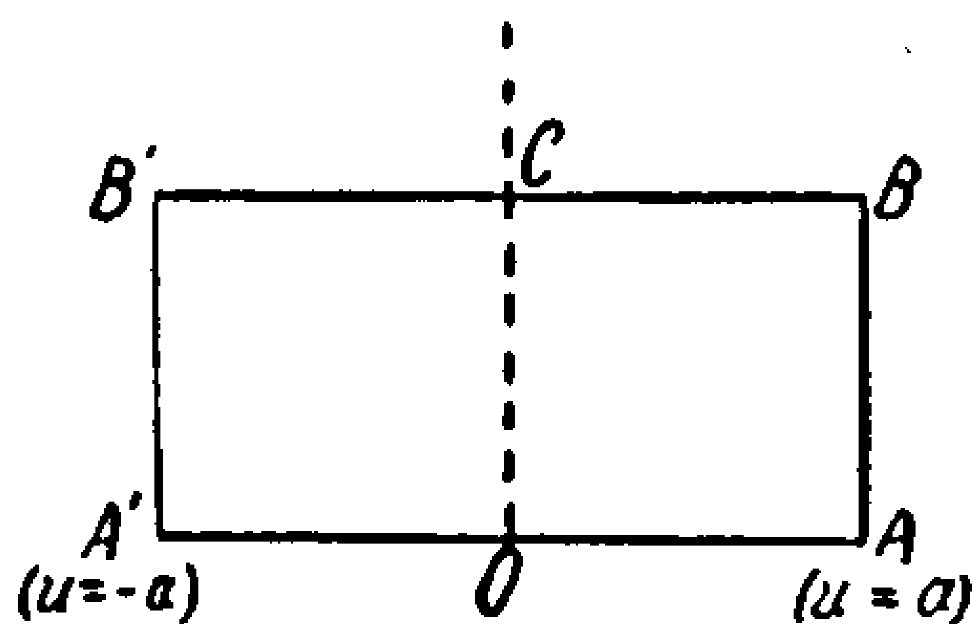


圖 12.

$$C''=0,\quad c_3=-1,\quad c_4=1。$$

這樣，有

$$C'u=\int_0^z\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x-c_1)(x-c_2)}}。\tag{1}$$

由黎曼-什瓦爾次 (Riemann-Schwarz) 原理，寫像的函數可解析開拓經過 z 平面實軸上的線段$[-1,\ 1]$。我們將得出與已知矩形關於實軸對稱的矩形(實軸下面的矩形)且我們的函數將它寫

像在下半平面。

另一方面，設我們在公式(1)內用 $-u$ 代 u，$-z$ 代 z，則所得的函數也給出下邊的矩形在下半平面的寫像。但設

$$-C'u=\int_0^{-z}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x-c_1)(x-c_2)}},$$

則

$$C'u=\int_0^{z}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x+c_1)(x+c_2)}}。\tag{2}$$

對於通常三個相當的境界點，由於寫像的函數是唯一的，函數(1)必須與(2)全等，由此推出

$$(x-c_1)(x-c_2)=(x+c_1)(x+c_2),$$

這便表明 $$c_2=-c_1。$$

這樣就有 $$(x-c_1)(x-c_2)=x^2-c_1^2,$$

如用 $\frac{1}{k}$ 代 c_1，其中 k 可認爲是正數且小於1，則寫像的函數具以下的形狀：

$$u=\frac{1}{C}\int_0^{z}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}。\tag{3}$$

現今共有二個參數 C、k。爲了確定它們，我們有以下的方程：

$$a=\frac{1}{C}\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\tag{4'}$$

$$bi=\frac{i}{C}\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}。\tag{4''}$$

用第一式除第二式，得到求 k 的方程：

$$\frac{b}{a}=\frac{\displaystyle\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}}{\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}。\tag{4}$$

若 k 已確定，則由(4′)[或由(4″)]可求得 C。

我們將從事於方程(4)的研究。爲此目的,改變積分

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

命

(5) $$k^2x^2+k'^2y^2=1$$

且注意到當 $\frac{1}{k} \geqslant x \geqslant 1$ 時 $0 \leqslant y \leqslant 1$。

由(5)得

$$\frac{k'dy}{\sqrt{1-k'^2y^2}} = -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}。$$

但因除此以外還有

$$k\sqrt{x^2-1} = k'\sqrt{1-y^2},$$

故 $$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}。$$

這樣,方程(4)取以下的形狀:

(4bis) $$\frac{b}{a} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}。$$

在右邊我們有對於模數 k'、k 的第一種完全橢圓積分 K'、K 的比。當 k 由 0 增大到 1 時,容易看出,右邊單調地由 ∞ 變到 0。由此可見,對於比 $\frac{b}{a}$ 的任意值,在區間(0, 1)內有這樣的 k 存在,它滿足於方程(4)。寫像函數是

(3bis) $$u = \frac{a}{K}\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}。$$

這個結果還可能由函數

$$z = \operatorname{sn}\left(\frac{Ku}{a}; k\right)$$

研究它的實數值而得出。我們就來說明它。

命點 u 由 $u=0$ 處出發沿我們矩形境界上的正方向移動。與

這一位置對應是 $z=0$。當 u 由值 0 增大到值 a 時,量 z 將由 $z=0$ 增大到 $z=1$。再轉來談我們矩形的 AB 邊。在這一邊上 $u=a+$ $+iv$, 其中 v 由 0 變化到 b。但因

$$\operatorname{sn}(K+iw;\ k)=\frac{\operatorname{cn}(iw;\ k)}{\operatorname{dn}(iw;\ k)}=\frac{1}{\operatorname{dn}(w;\ k')},$$

故在邊 AB 上有

$$z=\frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{Kv}{a};\ k'\right)},$$

其中 v 由 0 變化到 b, 這是表明 z 由 1 增大到 $\frac{1}{\operatorname{dn}(K';\ k')}=\frac{1}{k}$。轉來看看 BC, 在該線段上 $u=ib+v$ 且 v 由 a 變化到 0。因

$$z=\operatorname{sn}\left(iK'+\frac{Kv}{a};\ k\right)=\frac{1}{k\operatorname{sn}\left(\frac{Kv}{a};\ k\right)},$$

故 z 將由 $\frac{1}{k}$ 變化到 ∞。

我們看出,矩形境界右邊的一半 $OABC$ 與 z 平面上右邊的實軸對應。故,無須特別證明,矩形境界左邊的一半將與左邊的半實軸對應。

因為函數

$$z=\operatorname{sn}\left(\frac{Ku}{a};\ k\right)$$

在矩形內部是正則的,且因這個矩形的境界變換為實軸,故研究的函數把矩形寫像到半平面。

這個不依賴於橢圓函數論而得到寫像函數(3bis)的方法是很有趣的。因為它對標準情形($k<1$)能導出基本的雅各比橢圓函數且顯示其最主要的性質。

為簡單起見命 $a=K$, 因此 $b=K'$。我們有函數

$$u=f(z)\equiv\int_0^z\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\tag{6}$$

它把 z 平面的上半平面共形寫像在 u 平面的矩形 R 內（圖 13 及 14）。我們現今將依照黎曼-什瓦爾次對稱原理解析開拓函數 u。首先，我們可開拓函數經過線段 $[-1, 1]$，到 z 平面的下半平面。在 u 平面上我們得出矩形 R^{-1}。其次，進行開拓經過線段 $\left[-\frac{1}{k}, -1\right]$，它相當於矩形 R^{-1} 的邊 IV。我們又得出 z 平面的上半平面，但在 u 平面上則得出矩形 R_{-1}^{-1}。其次，再進行開拓經過線段 $[-1, 1]$，則引導到矩形 R_{-1}，這是下半平面的寫像。繼續這樣作去，將得出接連不斷的新的矩形，它們取極限後覆蓋全 u 平面。每一個非陰影的矩形是 z 平面上半平面的寫像，而每一個陰影的矩形是下半平面的寫像。

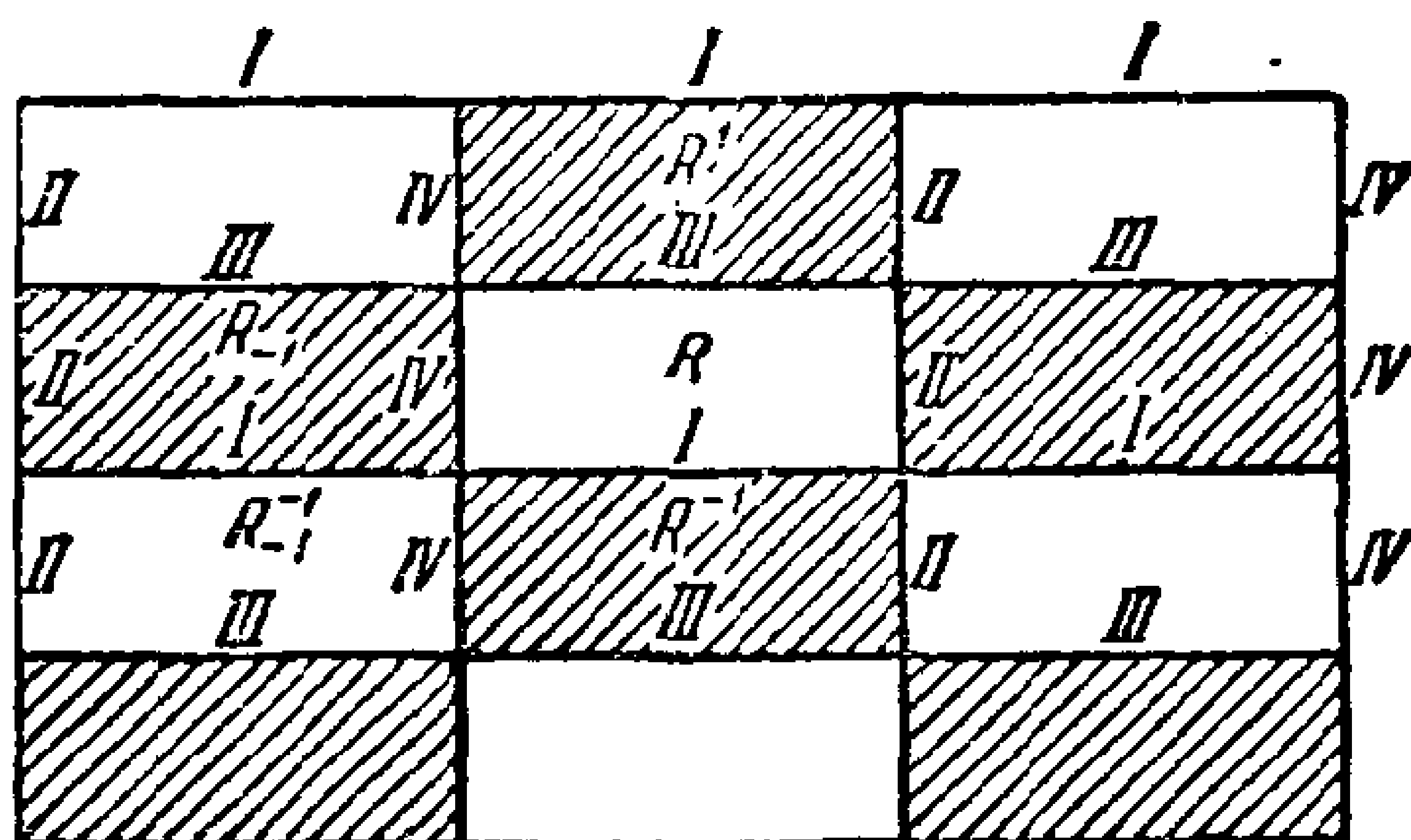


圖 13.

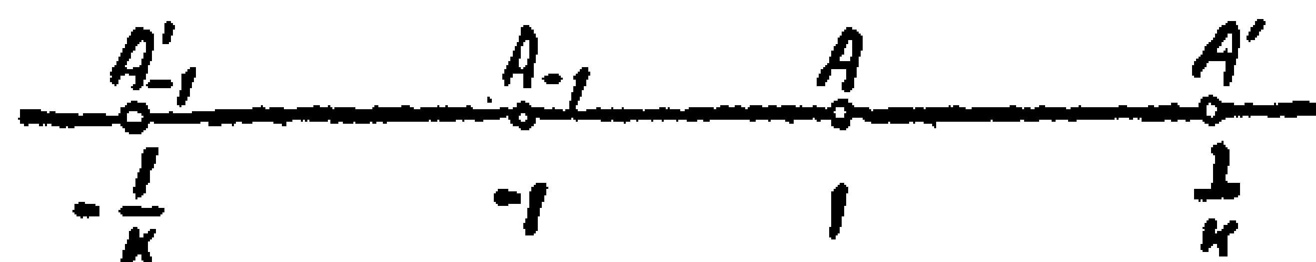


圖 14.

因 u 平面內的矩形沒有重疊部份，故每一值 u 對應一個完全確定的值 z，卽 z 是 u 的單值函數。這個函數的解析性我們是預先就知道的。函數 $z=g(u)$ 僅有的極點是點 $iK'+2mK+2inK'$，其中 m、n 是整數。

這些點是一級極點，也容易根據寫像函數的性質看出。事實上，取由 R 及 R' 組成的矩形。它寫像在沿線段 $\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ 有截口的全平面 z。無限遠點是 z 平面上的這個領域的內點。它的對應點在線 III 上是 $u=iK'$。假定在這一點，函數 $z=g(u)$ 有較高級的極點，則圍繞點 $u=iK'$ 一週在 z 平面上對應的繞點 $z=\infty$ 多

週，這是不可能的，因爲共形寫像是一對一的。

因此我們的斷言已證明。

函數 $z=g(u)$ 的週期性很簡單地可以證明。事實上，在矩形 R 內(圖 15)如取任一點 v，則求出關於邊 II 與 v 對稱的點 v'，其次再求出關於邊 IV 與 v 對稱的點 v''。函數 $g(u)$ 在點 v'、v'' 具有相同的值：

$$g(v')=g(v'')。$$

同時容易看出，$v'-v''$ 等於線段 I 的長的兩倍，卽等於 $4K$。同樣可證第二個週期是 $2iK'$。

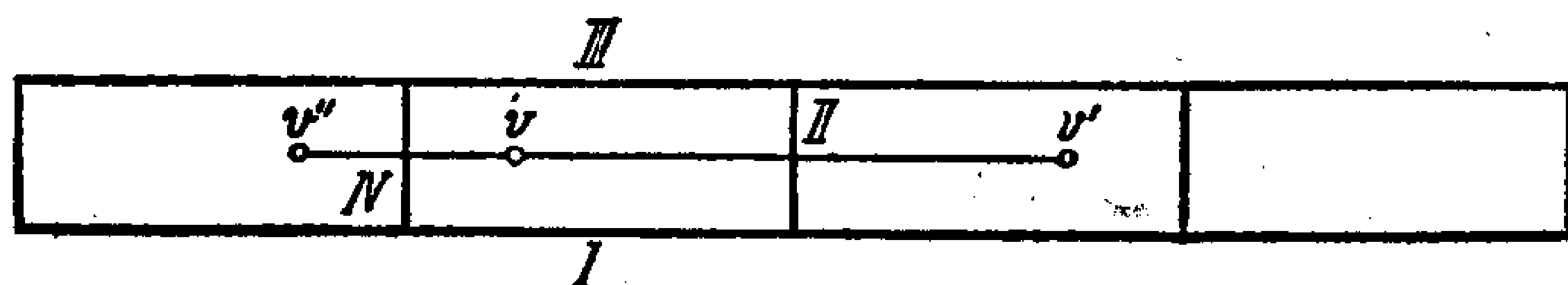


圖 15.

這樣，函數

$$z=\mathrm{sn}(u;\ k)$$

的基本性質證實了這個函數卽上限，作爲積分的值的函數。我們看出，在標準的情形中$(0<k<1)$反演的問題容易解出來。

再考察這個曲面，函數

$$z=\mathrm{sn}(u;\ k)$$

不祇把一個矩形例如 R，也不祇把相鄰的一對矩形，而是把複變數 u 的全平面寫像成這個面。

對於我們族內的每一個矩形與半平面對應：沒有陰影的與上半平面對應，而陰影的與下半平面對應。因爲有無窮多個矩形，故我們準備無窮多個半平面(陰影的及非陰影的)，而且把它們佈置得使非陰影的和陰影的沿實數軸彼此聯接，且使具有相同坐標的平面上的點一個在另一個的下面。

想要得出完全的 u 平面，我們必須將矩形沿一定的邊縫合。

半平面境界的部份，對應於縫合矩形，也加以縫合。結果我們在 z 平面得到無窮多葉的面，叫做黎曼面，它是 u 平面關於函數

$$z=\mathrm{sn}(u;\ k)$$

的寫像。

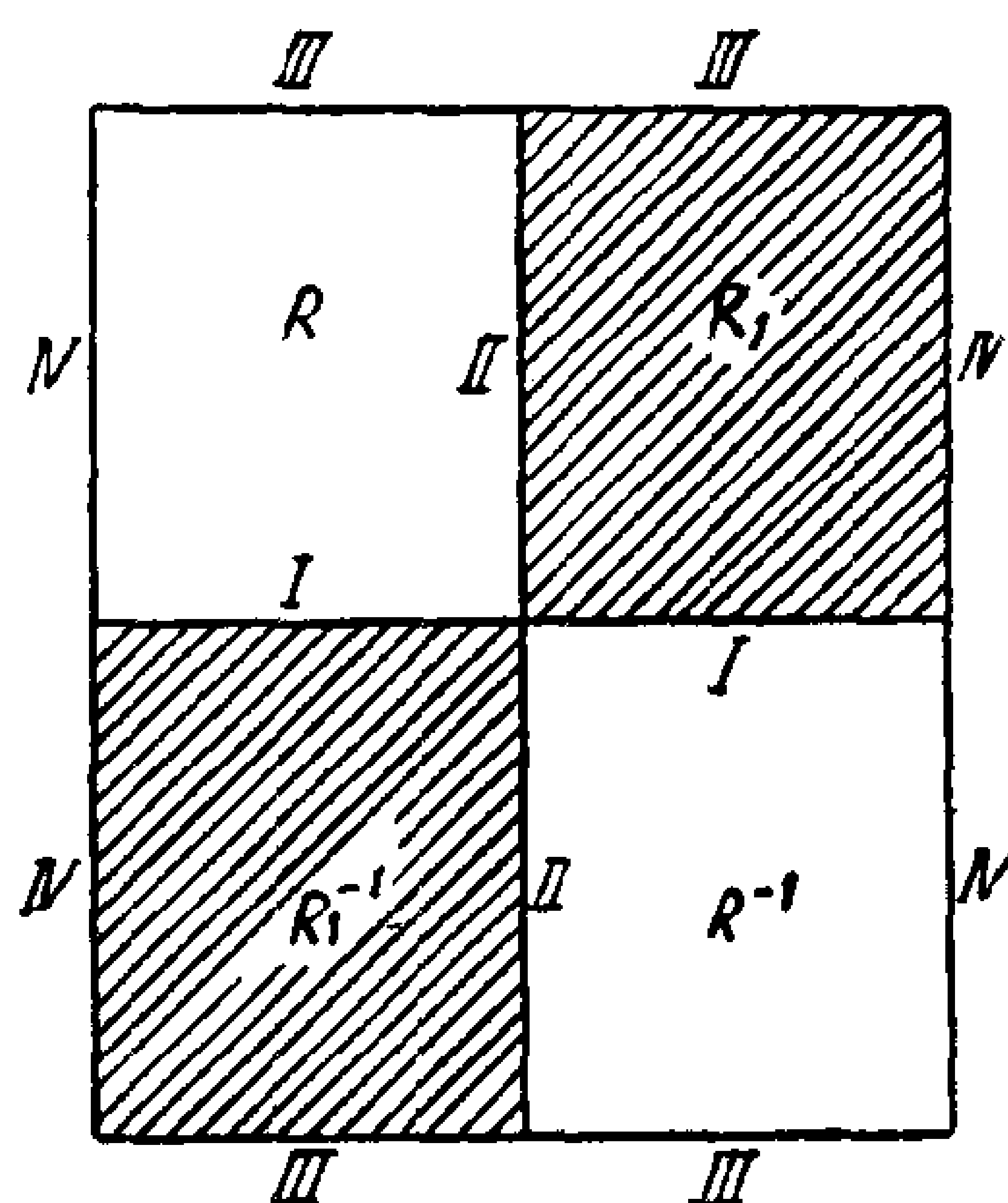


圖 16.

要研究以 $4K$、$2iK'$ 作週期的橢圓函數，只使用被研究的矩形組內的四個 R、R^{-1}、R_1^{-1}、R_1 (圖 16 及 17)就夠了。一對矩形 R、R^{-1} 相當於一對用同樣字母表示的半平面。沿 I 縫合矩形 R、R^{-1}，我們亦需沿區間 $[-1, 1]$ 縫合指出的半平面。因之，得出沿半軸 $(-\infty, -1)$，$(1, \infty)$作切斷的平面。沿 I 縫合 R_1 及 R_1^{-1}，得出沿半軸$(-\infty, -1)$，$(1, \infty)$作切斷的第二個平面。

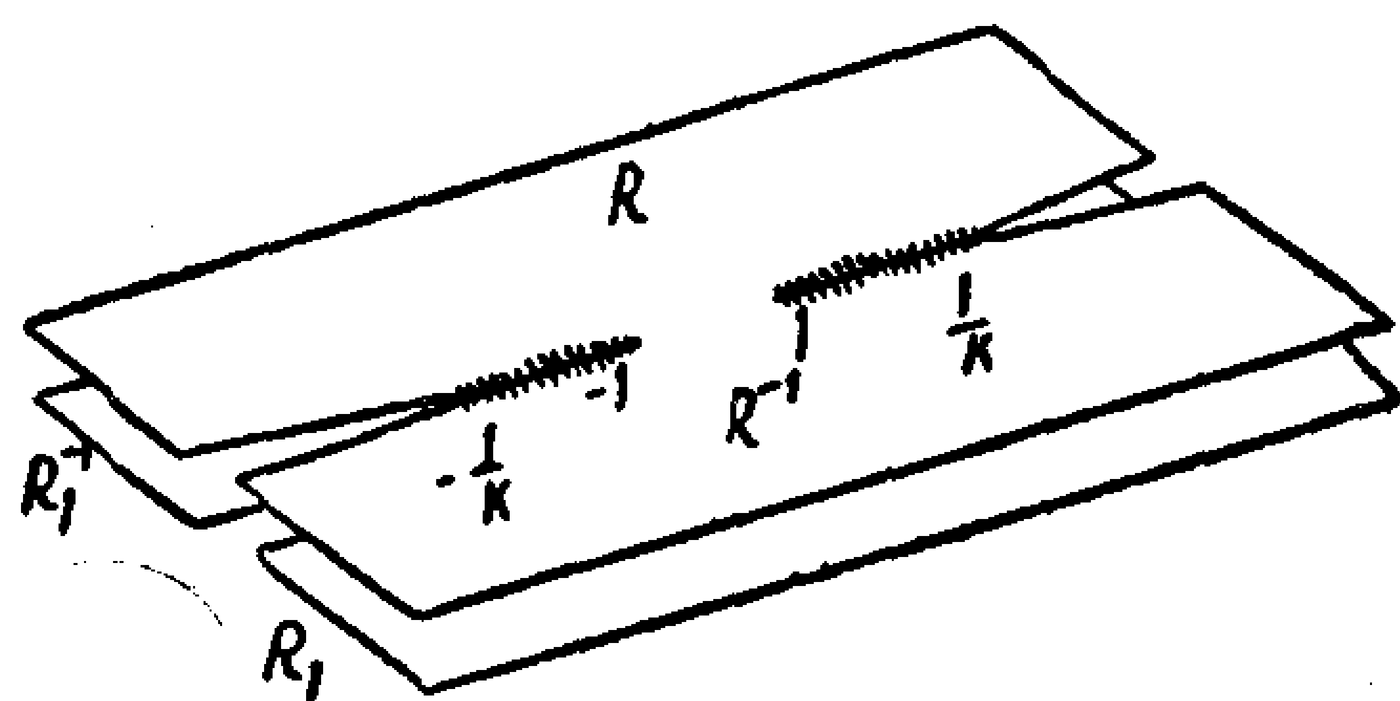


圖 17.

今沿 II 再沿 IV 縫合二重的矩形。同樣縫合平面。同時將對應上葉平面切斷 $\left(1, \frac{1}{k}\right)$的上岸與下葉平面對應的下岸縫合。

對於切斷 $\left(-\frac{1}{k}, -1\right)$ 也同樣地聯接。結果得出二葉的黎曼面，沿線段 $\left(-\frac{1}{k}, -1\right)$ 及 $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ 有一條改換線，且沿 $\left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$ 及 $\left(\frac{1}{k}, \infty\right)$爲切斷。

縫合矩形後，得出一段圓柱面(圖 18)。在 u 平面內兩個矩形的邊 III 上的相對的點，函數 $z=g(u)$ 取相同的值。故這些邊必

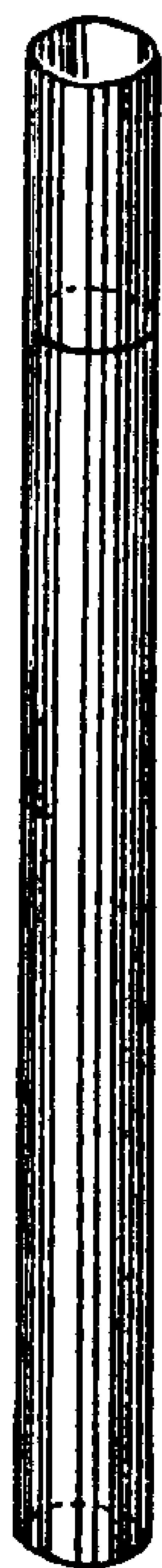


圖 18.

須縫合。轉到柱面，我們應當把它變形且縫合它的境界。我們得到一環形(圖 19)。

把黎曼面的各葉也應當相當地縫合，這裏必須將一個平面的半葉縫合。

結果我們將得到如圖 20 所表示的兩葉黎曼面。這一面已經沒有切斷。它有四個分歧點與兩個改換線。

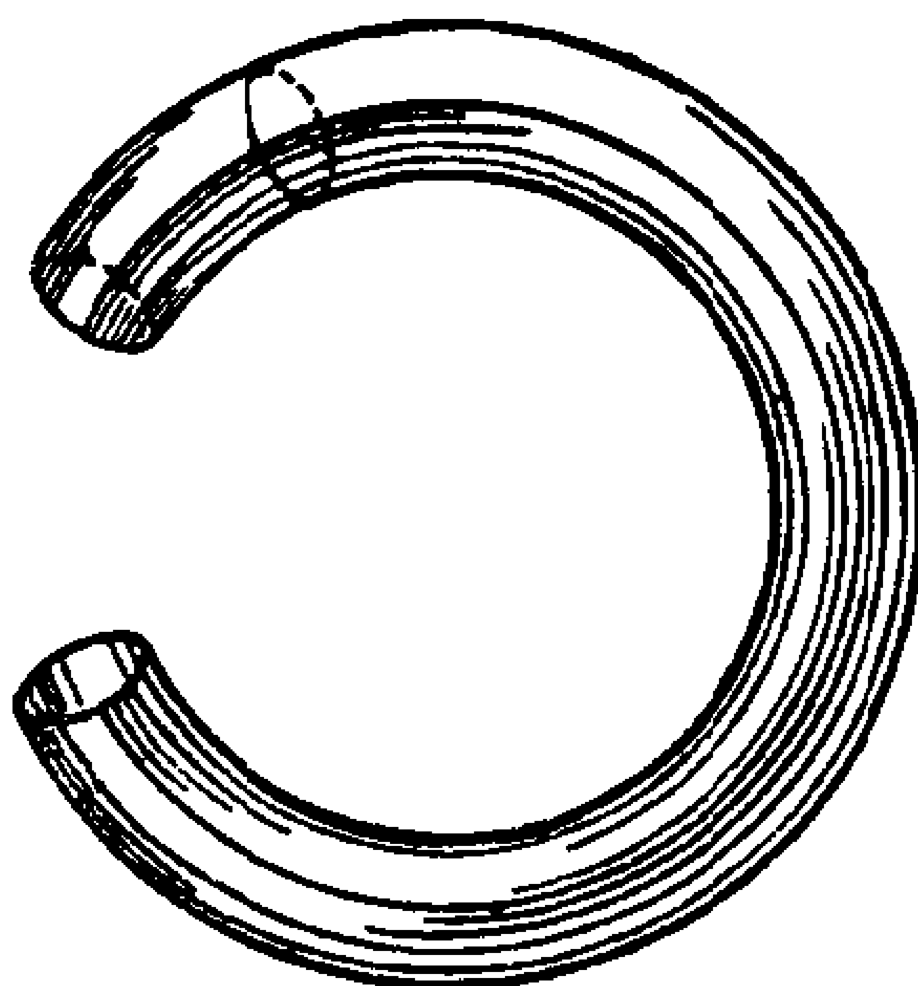


圖 19.

這樣，我們有三種像：剛才所構造的兩葉黎曼面，由四個矩形 R、R_1、R^{-1}、R_1^{-1} 所成的矩形，而這矩形對邊的對應點應當同樣看待，最後一個爲環形。

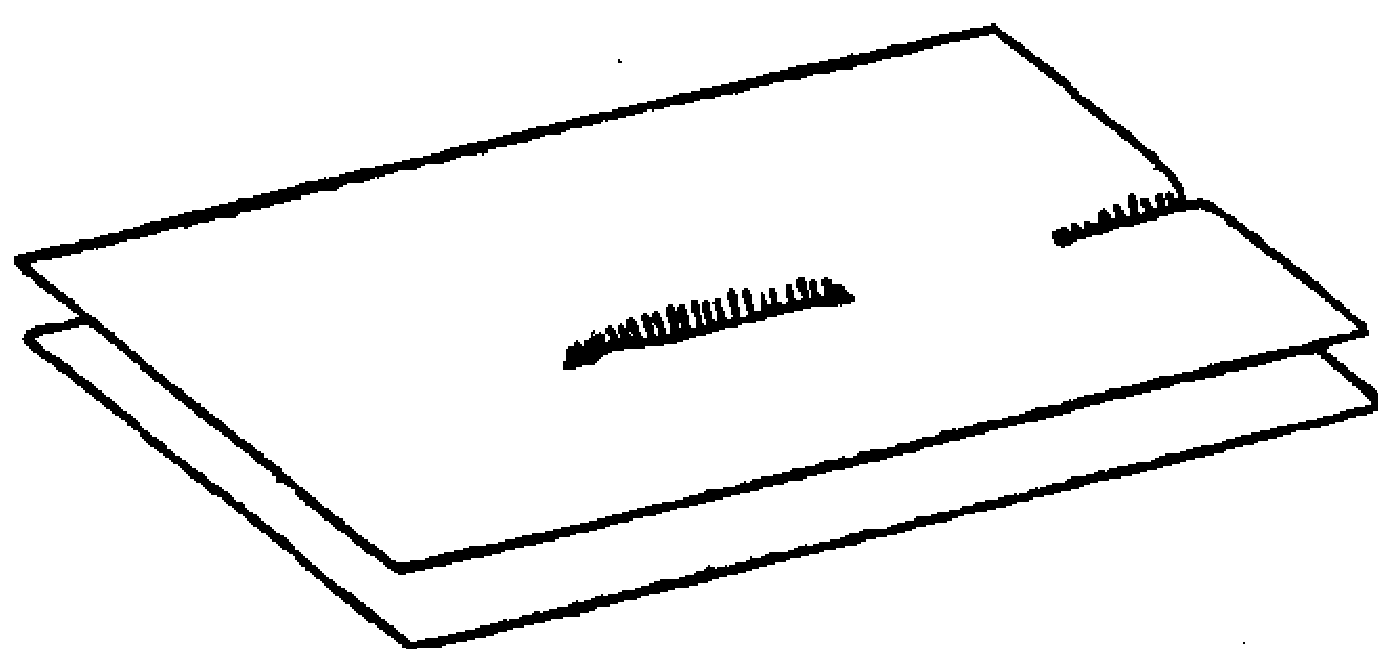


圖 20.

矩形寫像在黎曼面上爲共形的，但環形則拓撲地等價於矩形。故三種像完全拓撲地等價①。

但是不妨說明，環形在矩形的寫像，如上邊所作把矩形彎曲並縫合其對邊，不祇彼此是單値的及連續的，並且還是共形的。

① 黎曼面可以認爲由奈一曼(Neumann)球構成以替代一葉的平面。

命，環形是在 XOZ 平面上的圓繞 z 軸旋轉而成者，且命圓具有方程

$$(X-R)^2+Z^2=\rho^2。$$

想要確定環形上點的位置，可利用兩個角

$$\alpha,\ \varphi\ (0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$

它們的意義容易由圖 21 以及我們所導出的用這些角所表出的環形上點的笛卡爾坐標的式子看出來：

$$X=(R-\rho\cos\alpha)\cos\varphi,$$

$$Y=(R-\rho\cos\alpha)\sin\varphi,$$

$$Z=\rho\sin\alpha。$$

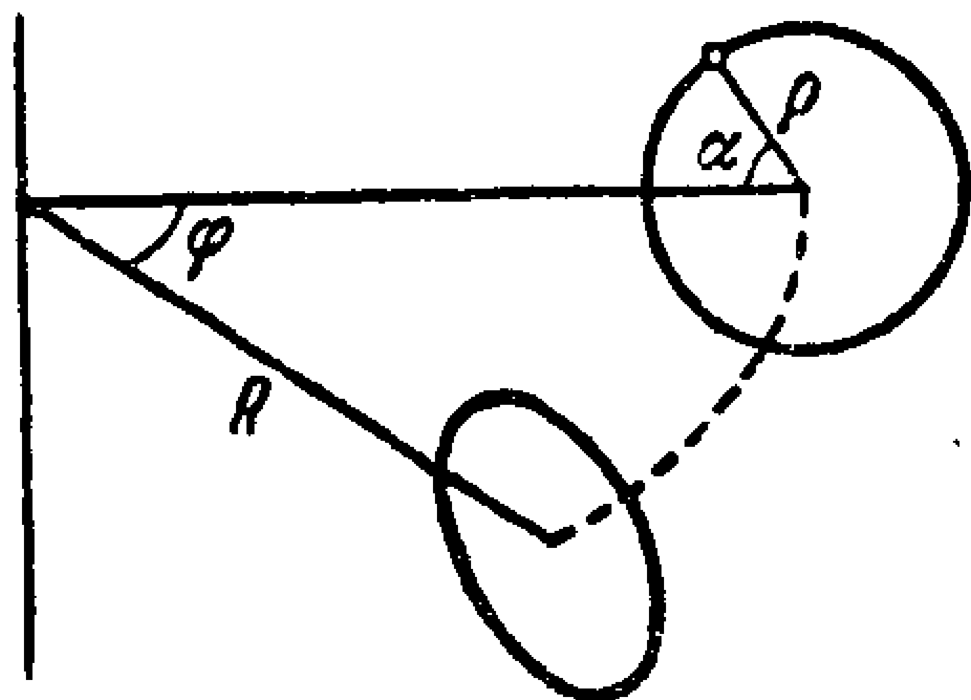


圖 21.

我們得弧的元素，

$$ds=\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}=\sqrt{(R-\rho\cos\alpha)^2\,d\varphi^2+\rho^2\,d\alpha^2}。$$

這一式可化爲下列形式

$$ds=(R-\rho\cos\alpha)\sqrt{d\xi^2+d\eta^2},$$

其中

$$(7)\qquad \xi=\varphi,\ \ \eta=\int_0^\alpha\frac{\rho\,d\alpha}{R-\rho\cos\alpha}。$$

當 φ 及 α 由 0 變化到 2π 時，在變數 ξ，η 的平面內點 (ξ,η) 的變化領域爲矩形，它的邊是：ξ 軸上的線段 $[0,2\pi]$，及 η 軸上的線段 $[0,l]$，其中

$$l=\int_0^{2\pi}\frac{\rho\,d\alpha}{R-\rho\cos\alpha}。$$

關於矩形的對邊我們將依照以上的規定。

藉助於公式(7)，它在環形上的寫像不祇互爲單值及連續，且爲共形的，因爲在弧微分的式子中 $d\xi^2$ 及 $d\eta^2$ 的係數是相同的。

每兩個對邊都可看成同樣的那個矩形就是週期矩形。橢圓函數類屬於它。這一類的每一函數在環形上可以視作單值解析函數

(一共祇有有限個極點作爲僅有的奇異點)。這一函數類(在矩形內與環形上)相當於在二葉黎曼面上的單值解析函數類，即

$$z \text{ 及 } \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

的所有有理函數。

這些事實不祇對橢圓函數及橢圓積分的研究，即對代數函數 $w(z)$ 的研究亦屬重要。$w(z)$ 由方程

$$w^2=f(z) \tag{8}$$

確定，其中 $f(z)$ 是沒有重根的四次多項式。就本質上說，我們的黎曼面之能在矩形上共形寫像是由於關係式(8)可以藉助於橢圓函數使其單一化。我們提醒，兩個量 z 及 w 之間的關係的單一化就是用某一個參數的諸單值解析函數表示這兩個量的意思。

若取任意的不可約的代數方程

$$F(z, w)=0$$

以替代方程(8)，或甚至於取形如(8)的方程而 $f(z)$ 非四次而爲較高次的，則沒有特殊困難地可以作多葉的黎曼面，在該面上一切具 $R(z, w)$ 型的函數將爲單值的。也可以在這種曲面上研究積分

$$\int R(z, w)dz,$$

這個積分是橢圓積分的推廣。但今後的構造，一般說來，不像在研究"橢圓的"情形這樣的簡單。雖然能單一化，但藉助的非橢圓函數而是保型(automorphic)函數。這些問題我們不能在本書內討論。

47. 雙連通多角形領域在圓環上的共形寫像 衆所週知，任意單連通領域(它的境界至少有兩個點)可以互相共形寫像。雙連通領域就不同了。例如，取二個圓環

$$g:\quad r_1\leqslant|z|\leqslant r_2\qquad (r_2>r_1>0),$$

$$G:\quad R_1\leqslant|Z|\leqslant R_2\quad (R_2>R_1>0)。$$

能將環 g 在環 G 的共形寫像的單值函數是分式線形函數，但在初等解析學內已指出，這個分式線形函數必具有以下的形狀：

$$Z = Az$$

或
$$Z = \frac{B}{z}。$$

其中 A 及 B 是常數。在第一情形中，我們將有

$$R_2 = |A| r_2, \quad R_1 = |A| r_1,$$

故
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}。$$

在第二種情形中

$$R_2 = \frac{|B|}{r_1}, \quad R_1 = \frac{|B|}{r_2}。$$

故仍有
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}。$$

我們看出，在下列情形，也只有在下列情形一個環共形寫像爲另一圓環：兩個圓環的每一個圓環的境界的半徑的比相同。任意的雙連通領域在任意圓環內的共形寫像將更屬不可能。但可以證明，對於每一雙連通領域有另外的圓環存在，使該領域在圓環內爲共形寫像。圓環境界的半徑的比是參數。在那種意義下，研究連通領域的特徵，祇是對於這一參數具有同一的數值時，然後雙連通領域才彼此的共形寫像。

我們將研究境界是多角形的雙連通領域，並求出將這種領域共形寫像爲圓環領域內寫像的函數的形狀。我們要想求[①]的公式是什瓦爾次-克雷司陶非爾一般公式的特殊情形，是借助於實施單

① 參閱阿希澤爾"空氣動力學的研究"（烏克蘭科學院物理數學部著作，烏克蘭文，第 VII 卷第 2 册 1928，第 193—246 頁，尤其是第 223—231 頁）。

在 1937 年列寧格勒大學發行的數學及力學研究的論文集中之一，"單連通和多連通領域的共形寫像"，高魯淨（Голузин）從新研究問題的解，顯然他不知道以前的解。順便注意，高魯淨指出的一個公式是不正確的[第 92 頁的公式（8）]。

連通多角形領域在圓內的共形寫像。從實用的觀點看，什瓦爾茨-克雷司陶非爾公式最大的缺點是難以決定公式裏邊的常數。這個缺點自然損害我們普遍的什瓦爾次-克雷司陶非爾公式，且在這裏領域的參數還增加未知常數的個數，卽圓環境界的半徑的比。

詳細地研究以下情形，當無限遠點是我們的多角形領域 S 的內點時，它是在複變數 z 平面上。換句話說，S 是二個用 A_0 和 A_1 表示的多角形以外的領域。

命 $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \cdots, \pi\alpha_n$ 表明多角形領域 A_0 及 A_1 的頂點的內角。命 1 及 h 爲 w 平面上圓環 G 的境界 C_0 及 C_1 的半徑，其中參數 h 爲小於 1 的正數，且是未知的，但必須把它求出。

最後命 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 表明多角形頂點在圓周 C_0 及 C_1 上的像。

其次，命領域 S 的無限遠點相當於 $w=c$，它是在正的半實軸上，使

$$h<c<1。$$

容易看出，這樣的假設是可以的而且不是本質的。所求的函數 $z=z(w)$ 在點 $w=c$ 處具有一級極點，但在領域 G 其餘的點則爲正則的，且一直到其境界爲連續。故可應用黎曼-什瓦爾次對稱原理，將函數 $z(w)$ 開拓到圓環 G 的限界外。首先，我們可作出在 z 平面內關於任意多角形 A_0 的邊的鏡像，且在 w 平面內關於圓周 C_0 的鏡像。這樣函數 $z(w)$ 將開拓在圓環 G_{-1} 內，它的境界是圓 C_0 及圓 C_{-1}:

$$|w|=\frac{1}{h}。$$

在圓環 G_{-1} 內，函數 $z=z(w)$ 具有一級極點

$$w=\frac{1}{c}。$$

對於其餘的鏡像，我們將得出圓環 $G_1, G_{-2}, G_2, \cdots$。z 平面上連

續偶數次的鏡像，容易看出來，等價於 z 平面上的某一個平移及某一個旋轉。在 w 平面上相當的寫像由下公式給出：

$$w_1=h^{2k}w\text{。}$$

因爲 z 平面上平移及旋轉可用下公式表示：

$$z_1=az+b,$$

其中 a 及 b 是常數，故欲求的函數 $z=z(w)$ 必須滿足以下的關係：

$$z(h^{2k}w)=az(w)+b\text{。}$$

由此得

$$\frac{d}{dw}z(h^{2k}w)=a\frac{d}{dw}z(w),$$

及

$$\frac{\frac{d^2}{dw^2}z(h^{2k}w)}{\frac{d}{dw}z(h^{2k}w)}=\frac{\frac{d^2}{dw^2}z(w)}{\frac{d}{dw}z(w)}\text{。}$$

這一等式可寫成以下的形狀：

$$h^{2k}\frac{z''(h^{2k}w)}{z'(h^{2k}w)}=\frac{z''(w)}{z'(w)},$$

而且我們可看出，函數

$$\Phi(w)=w\frac{z''(w)}{z'(w)}$$

滿足於關係式

$$\Phi(h^{2k}w)=\Phi(w)\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)\text{。}$$

當 $k=1$ 時把它寫成：

$$(1)\qquad \Phi(h^2w)=\Phi(w)\text{。}$$

取任意的正數 ω，且確定一純虛數 ω'，使

$$h=e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}}$$

命

$$\Phi(w)=\varphi\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w\right)\text{。}$$

這時由（1）我們求得，函數 $\varphi(u)$ 滿足於關係式

$$\varphi(u+2\omega')=\varphi(u)。$$

現今檢查一下，當點 w 沿在圓環 G_k $(G_0=G)$ 中的一個裏邊且包含點 $w=0$ 的閉境界繞一週時，$\Phi(w)$ 不改變。因爲對於這一旋轉 w 的角增大 2π，也就是說量

$$u=\frac{\omega}{\pi i}\ln w$$

變化 2ω，故必有等式

(2) $$\varphi(u+2\omega)=\varphi(u)。$$

我們看出，$\varphi(u)$ 是用 2ω、$2\omega'$ 作週期的雙週期函數，想要作出這一函數，必須研究這一函數在某一週期矩形內的奇異點。這就歸結到研究函數 $\Phi(w)$ 在某圓環內的奇異點。取境界是圓周 C_{-1}、C_1 的環作爲這個環。但最好取由圓周

$$|w|=\varepsilon h^{-1},\quad |w|=\varepsilon h,$$

作境界的環形 Q，其中 ε 小於 1，但與它相差很小。在這樣的環形的境界上，函數 $\Phi(w)$ 是正則的，環形的內部僅有的極點是

$$w=a_k,\ c,\ \frac{1}{c}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

同時容易看出，對於這些點，下邊的展開式成立：

$$z=常數+(w-a_k)^{\alpha_k}\mathfrak{P}(w-a_k),$$

$$z=\frac{L}{w-c}+\mathfrak{P}(w-c)\quad (L\neq 0),$$

$$z=\frac{L'}{cw-1}+\mathfrak{P}(w-c)\quad (L'\neq 0),$$

其中 $\mathfrak{P}$ 是冪級數的普通記號。函數 $\Phi(w)$ 的相當的展開式具有以下的形狀：

$$\Phi(w)=\frac{a_k(\alpha_k-1)}{w-a_k}+\cdots,$$

$$\Phi(w)=-\frac{2c}{w-c}+\cdots,$$

$$\Phi(w)=-\frac{2}{cw-1}+\cdots。$$

藉助於這些公式,我們將求出,對於被考察的點,

$$\varphi(u)=\frac{\omega}{\pi i}\frac{\alpha_k-1}{u-\frac{\omega}{\pi i}\ln a_k}+\cdots,$$

$$\varphi(u)=-\frac{\omega}{\pi i}\frac{2}{u-\frac{\omega}{\pi i}\ln c}+\cdots,$$

$$\varphi(u)=-\frac{\omega}{\pi i}\frac{2}{u+\frac{\omega}{\pi i}\ln c}+\cdots。$$

這樣, $\varphi(u)$ 祇具有極點且爲一級的。留數之和等於零, 因爲由矩形外角之和的定理有

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)=4。$$

由此可見, $\varphi(u)$ 是橢圓函數,且根據 §14 的一般定理有

$$\varphi(u)=\frac{\omega}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\zeta\left(u-\frac{\omega}{\pi i}\ln a_k\right)-$$

$$-\frac{2\omega}{\pi i}\zeta\left(u-\frac{\omega}{\pi i}\ln c\right)-\frac{2\omega}{\pi i}\zeta\left(u+\frac{\omega}{\pi i}\ln c\right)+L,$$

其中 L 是某一個常數。積分再去掉對數,得

$$z'(w)=\mu w^{\lambda}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\right)},\tag{3}$$

其中 μ 及 λ 也是某兩個常數。

令命點 w 繞包含 $w=0$ 點且在某一圓環 G_k 內的閉境界旋轉一週。左邊不變,但右邊出現因子

$$e^{2\pi i\lambda}e^{\pi i\left[\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)-4\right]}=e^{2\pi i\lambda}。$$

由此可見, λ 必須是整數。

假設我們使領域 S 連續變形，則量 h 以及函數 $z(w)$ 都連續改變。故 λ 也將連續改變。但因 λ 是整數，故 λ 必須保持不變。欲求 λ，考察領域 S 的這種變形，經過這種變形後對於多角形 A_1 不改變它的角但縮小到一點，這樣取極限，我們就得到多角形 A_0 的外部領域在圓內的寫像；參數 h 取極限，容易看出，將等於零。假設多角形 A_0 的頂點是領域 S 的最初的 m 個頂點，則對於寫像極限領域的函數，

$$(3')\qquad z_0'(w)=\mu_0\prod_{k=1}^{m}(w-\tilde{a}_k)^{\alpha_k-1}\frac{1}{(w-c)^2\left(w-\frac{1}{c}\right)^2},$$

同時，函數（3）取極限變為

$$(3'')\qquad \mu w^{\lambda}\prod_{k=1}^{m}(w-a_k)^{\alpha_k-1}w^{\sum\limits_{j=m+1}^{n}(\alpha_j-1)}\frac{1}{(w-c)^2\left(w-\frac{1}{c}\right)^2},$$

其中參數 μ, α_k, c 可取與（3）內不相同的值。但可認為 (3′) 及 (3″) 內的參數 c 相同。因為

$$\sum_{j=m+1}^{n}(\alpha_j-1)=2,$$

故比較(3′)及(3″)可斷定 $\lambda+2=0$，即公式（3）必須具以下的形狀：

$$z'(w)=\frac{\mu}{w^2}\;\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\right)}。$$

由此

$$c_1z+c_2=\int\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\right)}\;\frac{dw}{w^2}。$$

還應注意，待定的參數間有一關係存在。想要得到它，記住當點 w 繞點 $w=c$ 旋轉一週時 z 不改變。求出積分號下函數在點

$w=c$ 處的留數，且命其等於零，我們將得出欲求的關係式

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln c-\ln a_k}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln c-\ln a_k}{2\pi i}\right)}-2\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln c}{\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln c}{\pi i}\right)}=2\pi i。$$

當領域是有限的時，可以完全類似地來處理。在這一情形下，和從前一樣命 $\pi\alpha_k$ 表示領域的內角，我們求出下列的寫像函數的公式：

$$c_1z+c_2=\int\prod_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}\frac{dw}{w^2}。$$

48. 共形寫像的例子　本節內我們將考察多角形雙連通領域共形寫像的例子。在最初兩個例子中我們用前節所導出的公式，雖然在第二例子中寫像的函數不用一般理論也可得出。

例題 1.　試將兩個同心正 n 角形所圍成的領域寫像為圓環，這兩個多角形相當頂點的位置在過中心的同一射線上。

命圓環形境界的半徑為 1 及 h $(0<h<1)$，且命外多角形的頂點 A_1 的像為點 1 (圖 22)。

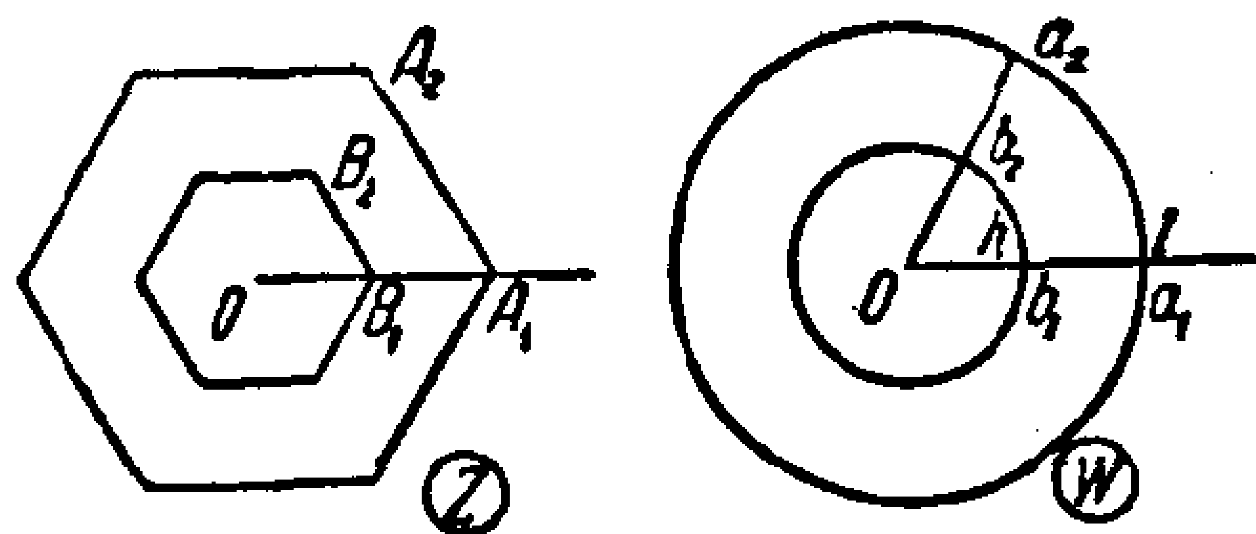


圖 22.

考察到對稱性則有，頂點 A_r 及 B_r 在圓環形領域內相當的點是 $a_r=e^{\frac{2(r-1)\pi i}{n}}$，$b_r=ha_r$　$(r=1, 2, \cdots, n)$。

今導出純虛數 $\tau\left(\frac{\tau}{i}>0\right)$ 使

$$h=e^{\pi i\tau}。$$

因多角形領域的內角各等於

$$\pi\alpha_r=\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi\text{——在頂點 }A_r$$

及

$$\pi\beta_r=\left(1+\frac{2}{n}\right)\pi\text{——在頂點 }B_r,$$

故應用一般公式，得出寫像函數的式子

$$(1)\qquad z-1=C'\int_1^w \prod_{r=1}^{n}\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln ha_r}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln a_r}{2\pi i}\right)}\right]^{\frac{2}{n}}\frac{du}{u^2},$$

其中 $$\vartheta_1(v)=\vartheta_1(v\,|\,\tau)。$$

但

$$\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln ha_r}{2\pi i}\right)=\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_r}-\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=常數\cdot u^{\frac{1}{2}}\vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_r}\right),$$

故

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln ha_r}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln a_r}{2\pi i}\right)}=常數\cdot u^{\frac{1}{2}}\frac{\vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_r}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_r}\right)}=$$

$$=常數\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi i}\ln\frac{u}{a_r};\ k\right)}。$$

利用以上最後的等式，我們可使寫像的函數（1）具有以下的形狀：

$$z-1=C''\int_1^w\frac{du}{u\sqrt[n]{\prod\limits_{r=1}^{n}\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi i}\ln\frac{u}{a_r};\ k\right)}}$$

或 $$z-1=C'''\int_1^w\frac{du}{u\sqrt[n]{\prod\limits_{r=-n}^{n-1}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi i}\ln u-\frac{2rK}{n};\ k\right)}}。$$

注意到 $$\operatorname{sn}(v+\alpha)\operatorname{sn}(v-\alpha)=\frac{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v},$$

可以寫出

$$\prod_{r=-n}^{n-1}\operatorname{sn}\left(v-\frac{2rK}{n}\right)=-\operatorname{sn}^2 v\prod_{r=1}^{n-1}\frac{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\frac{2rK}{n}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{2rK}{n}\operatorname{sn}^2 v},$$

但因
$$\operatorname{sn}^2\frac{2\alpha K}{n}=\operatorname{sn}^2\frac{2(n-\alpha)K}{n},$$

故量
$$\prod_{r=-n}^{n-1}\operatorname{sn}\left(v-\frac{2rK}{n}\right)=\Omega$$

當 n 爲奇數時等於

$$-\operatorname{sn}^2 v\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\frac{2rK}{n}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{2rK}{n}\operatorname{sn}^2 v}\right\}^2$$

而且當 n 爲偶數時等於

$$\frac{\operatorname{sn}^2 v\cdot\operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{dn}^2 v}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left\{\frac{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\frac{2rK}{n}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{2rK}{n}\operatorname{sn}^2 v}\right\}^2。$$

根據附表 XXII 我們斷定,在這種情形中

$$\Omega=N\operatorname{sn}^2\left(\frac{v}{M};\lambda\right),\quad L=\frac{K}{nM},\quad L'=\frac{K'}{M},$$

其中 N 是常數,而 λ 及 M 可藉助於表 XXII 指出的公式來確定。

這樣,寫像的函數可具有以下的形狀:

$$z-1=C\int_1^w\frac{du}{u\sqrt[n]{\operatorname{sn}^2\left(\frac{K\ln u}{M\pi i};\lambda\right)}},$$

其中

$$\lambda=k^n\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\operatorname{sn}^4\left(\frac{2r-1}{n}K;k\right),$$

$$M=\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n}K;k\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r}{n}K;k\right)},$$

而 C 爲某一常數。

將我們得到的結果與將 z 平面上內接於單位圓的正 n 角形寫像爲 w 平面上的單位圓的函數,比較是有益處的。設點 $w=0$,

$w=1$，變到對應的點 $z=0$，$z=1$，則對於寫像函數將有

$$(2)\qquad z-1=C'\int_1^w \frac{du}{\sqrt[n]{(u^n-1)^2}}。$$

注意到 $$u^{\frac{n}{2}}-u^{-\frac{n}{2}}=2i\sin\frac{n\ln u}{2i},$$

則公式(2)可改寫成以下的形狀：

$$z-1=C\int_1^w \frac{du}{u\sqrt[n]{\sin^2\frac{n\ln u}{2i}}}。$$

我們看出，在我們的情形，函數 sn 處在通常正弦函數在這個公式內所處的地位。

例題 2. 試將沿着兩個相等的平行線段(一個恰好在他一個上面)切斷的平面寫像爲圓環(圖 23)。

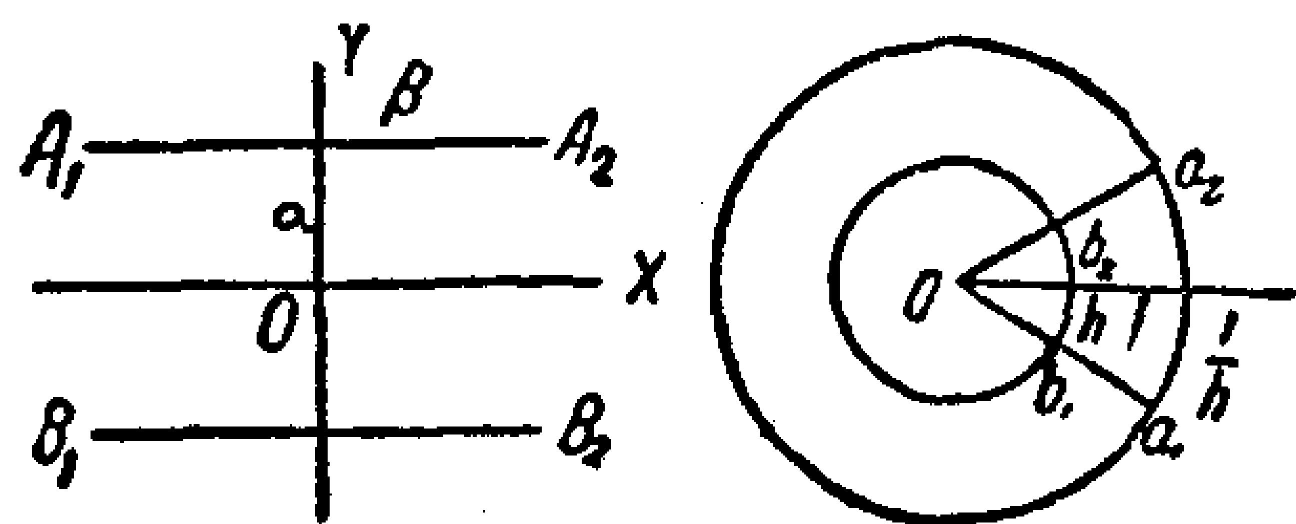


圖 23.

命線段 A_1A_2 及 B_1B_2 之長爲 2β，它們關於 x 軸對稱，且與 OX 軸的距離是 α；我們將作一函數，將沿 A_1A_2 及 B_1B_2 切斷的平面寫像到環形

$$(3)\qquad h^{\frac{1}{2}}\leqslant|u|\leqslant\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}\quad(0<h<1)。$$

由於對稱性可設：我們線段的端點 A_1, A_2, B_1, B_2 的像是點

$$(4)\qquad \begin{aligned}&a_1=\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}e^{-i\mu},\quad a_2=\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}e^{i\mu}=\frac{1}{ha_1},\\&b_1=h^{\frac{1}{2}}e^{-i\mu}=ha_1,\quad b_2=\frac{1}{a_1}。\end{aligned}$$

同時，z 平面上的無限遠點與點 $w=1$ 對應。

這樣，§ 47 的一般公式給出到環形

$$(3^{\text{bis}})\qquad h\leqslant|w|\leqslant 1$$

的寫像，故預先由關係式

$$w=h^{\frac{1}{2}}u$$

改變它，這個關係式將環形(3bis)變爲環形(3)。此外，注意到，我們的數據(4)，則有

$$A'z+B'=$$
$$=\int\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln a_1}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\ln u+\ln a_1}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln ha_1}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\ln u+\ln ha_1}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\ln u+\ln h}{2\pi i}\right)}\times$$
$$\times du,$$

其中　$\vartheta_1(v)=\vartheta_1(v|\tau),\quad h=e^{\pi i\tau},$

或由西他函數的遞推公式，

$$A'z+B'=$$
$$=\int\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln a_1}{2\pi i}\right)\vartheta_0\left(\frac{\ln u-\ln a_1}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\ln u+\ln a_1}{2\pi i}\right)\vartheta_0\left(\frac{\ln u+\ln a_1}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\right)\vartheta_0^2\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\right)}\times$$
$$\times\frac{du}{u}。$$

若再利用恆等式

$$\vartheta_1(v|\tau)\vartheta_0(v|\tau)=\frac{1}{2}\vartheta_2\left(0\middle|\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1\left(v\middle|\frac{\tau}{2}\right)$$

(參閱表 XXI)則得

$$(5)\quad A'z+B'=\int\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln u+\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\ln u-\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}\frac{du}{u}。$$

考察下式：

$$\frac{\vartheta_1\left(v+c\middle|\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1\left(v-c\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1^2\left(v\middle|\frac{\tau}{2}\right)}。$$

這是用1、$\frac{\tau}{2}$作週期的橢圓函數。容易看出，它的部份分式展開式

可寫成以下的形狀:

$$\frac{\vartheta_1(v+c)\vartheta_1(v-c)}{\vartheta_1^2(v)}=L\left[\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}\right]'+M\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}+N,$$

其中 L、M、N 是某些常數。這一等式的左邊是 v 的偶函數。但因

$$\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}$$

是奇函數,同時右邊其餘的項全是偶函數,故 $M=0$。因而

$$\frac{\vartheta_1(v+c)\vartheta_1(v-c)}{\vartheta_1^2(v)}=L\left[\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}\right]'+N。\tag{6}$$

想要求出常數 L 及 N,將這一恆等式的兩邊按 v^2 的冪展開:

$$-\frac{\vartheta_1^2(c)}{\vartheta_1'^2(0)}\frac{1}{v^2}+\frac{\vartheta_1^2(c)\vartheta_1'''(0)}{3\vartheta_1'^3(0)}+\frac{\vartheta_1'^2(c)-\vartheta_1(c)\vartheta_1''(c)}{\vartheta_1'^2(0)}+\cdots=$$

$$=L\left\{-\frac{1}{v^2}+\frac{\vartheta_1'''(0)}{3\vartheta_1'(0)}+\cdots\right\}+N。$$

故

$$L=\frac{\vartheta_1^2(c)}{\vartheta_1'^2(0)},$$

$$N=\frac{\vartheta_1'^2(c)-\vartheta_1(c)\vartheta_1''(c)}{\vartheta_1'^2(0)}。$$

將公式(6)應用於積分(5)的積分號下的式子。我們得到下邊的寫像函數:

$$A'z+B'=2\pi i\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1'\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'^2\left(0\middle|\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}+$$

$$+\frac{\vartheta_1'^2\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)-\vartheta_1\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1''\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1'^2\left(0\middle|\frac{\tau}{2}\right)}\ln u。$$

因爲寫像的函數在環形內是單值的,故右邊的第二項必須等於零。由此得

$$Az+B=\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)},$$

且

(7) $$\vartheta_1'^2\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)-\vartheta_1\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1''\left(\frac{\ln a_1}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)=0。$$

考慮到對稱性顯然知道，點 $z=0$ 變到點 $u=-1$。故

$$B=\frac{\vartheta_1'\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}=0。$$

在另一方面，點 $z=\beta+i\alpha$ 必須與點

$$u=\frac{1}{ha_1}=\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}e^{i\mu}$$

相當。故

$$A(\beta+i\alpha)=-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\tau}{4}-\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\tau}{4}-\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}=\pi i+\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}$$

且同樣可求得

$$A(-\beta+i\alpha)=\pi i-\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}。$$

故

(8_1) $$A\alpha=\pi,$$

(8_2) $$A\beta=\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}。$$

這樣，寫像的函數具以下的形狀:

$$z=\frac{\alpha}{\pi}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\middle|\frac{\tau}{2}\right)},$$

並且尙可寫出兩個用以求 μ 及 τ 的方程。一個方程由 (8_1) 及 (8_2) 得出，且具有以下的形狀：

$$(9_1)\qquad \frac{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}=\pi\frac{\beta}{\alpha}。$$

第二個方程由(7)得出。它具有下邊的形狀：

$$(9_2)\qquad \frac{\vartheta_0''\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0'\left(\frac{\mu}{2\pi}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}=\pi\frac{\beta}{\alpha}。$$

方程 (9_1) 及 (9_2) 可化爲比較便於計算的其他形狀。我們引出結果，但不證明。可敍述如下：命

$$q=e^{\frac{\pi i\tau}{2}}$$

及

$$\sqrt{k}=\frac{2(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+\cdots)}{1+2q+\cdots},$$

其次命

$$\lambda=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{K-E}{K}};$$

則

$$\mu=\frac{\pi}{K}\int_0^\lambda\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

及

$$\beta=\frac{2\alpha}{\pi}\left\{K\int_0^\lambda\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt-E\int_0^\lambda\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\right\}。$$

這樣可以給出量 q，即環形境界之一的半徑。由所挑選的 q，我們可以從表的幫助求出量 μ 以及 β 對 α 的比。這就可以建立(例如，用圖解的方法) q 與 $\frac{\beta}{\alpha}$ 的關係。有了這關係，也可取比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 作爲開始的參數。

例題 3. 試將沿實軸上兩個線段切斷的 z 平面寫像爲 w 平面的圓環。

命 z 平面實軸上的二線段是

$$[-1,\alpha],\ [\beta,1] \quad (-1<\alpha<\beta<1)。\tag{10}$$

設

$$k^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)}\tag{11}$$

且取數 $k(0<k<1)$ 爲橢圓函數的模。

其次,在附加條件 $-K<\rho<0$ 之下,由方程

$$1-2\operatorname{sn}^2\rho=\alpha\tag{12}$$

確定數 ρ。

由(12)及(11)得

$$2\frac{\operatorname{cn}^2\rho}{\operatorname{dn}^2\rho}-1=\beta。$$

今設

$$z=\frac{\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{cn}^2\rho+\operatorname{cn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2\rho}{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2\rho}$$

這也可寫成以下的形狀:

$$z-\alpha=\frac{1-\alpha^2}{2\operatorname{sn}^2 u+\alpha-1}。\tag{13}$$

今於 u 平面內取矩形 Δ, 由以下不等式確定:

$$-K\leqslant\Re u\leqslant 0,\quad -K'\leqslant\Im u\leqslant K'。$$

實數軸分割這一矩形爲兩個矩形: 一在軸的上方, 一在軸的下方。沿正方向從點 $u=\rho$ 開始繞上邊矩形的境界一週。容易看出,這樣繞一週後,點 z 由點 $-\infty$ 到點 ∞ 劃實數軸。所以由公式(13),上述的上邊的矩形寫像在 z 平面的上半平面。同時, 這一矩形的下底相當於 z 平面上實軸取掉區間$[-1,1]$所剩下的那部份。其次,公式(13)同樣將下邊的矩形寫像在 z 平面的下半平面。

故我們的公式(13)把矩形 Δ 的全部寫像到沿區間$[-1,1]$作切斷後的全 z 平面。

今設 $$u=\frac{K'}{\pi}\ln w。$$

再加一補充條件，即對於 $w=1$ 有 $u=0$。藉助於這公式，矩形 Δ 寫像在 w 平面上的圓環，它的境界是圓周

$$|w|=1,\ |w|=e^{-\pi\frac{K}{K'}}$$

且沿實軸的負半軸作切斷。除去這個切斷，在 u 平面上等於把矩形 Δ 的上邊與下邊等量齊觀；在 z 平面上等於把上半平面與下半平面沿實軸上線段 $[\alpha,\beta]$ 縫合(圖 24)。

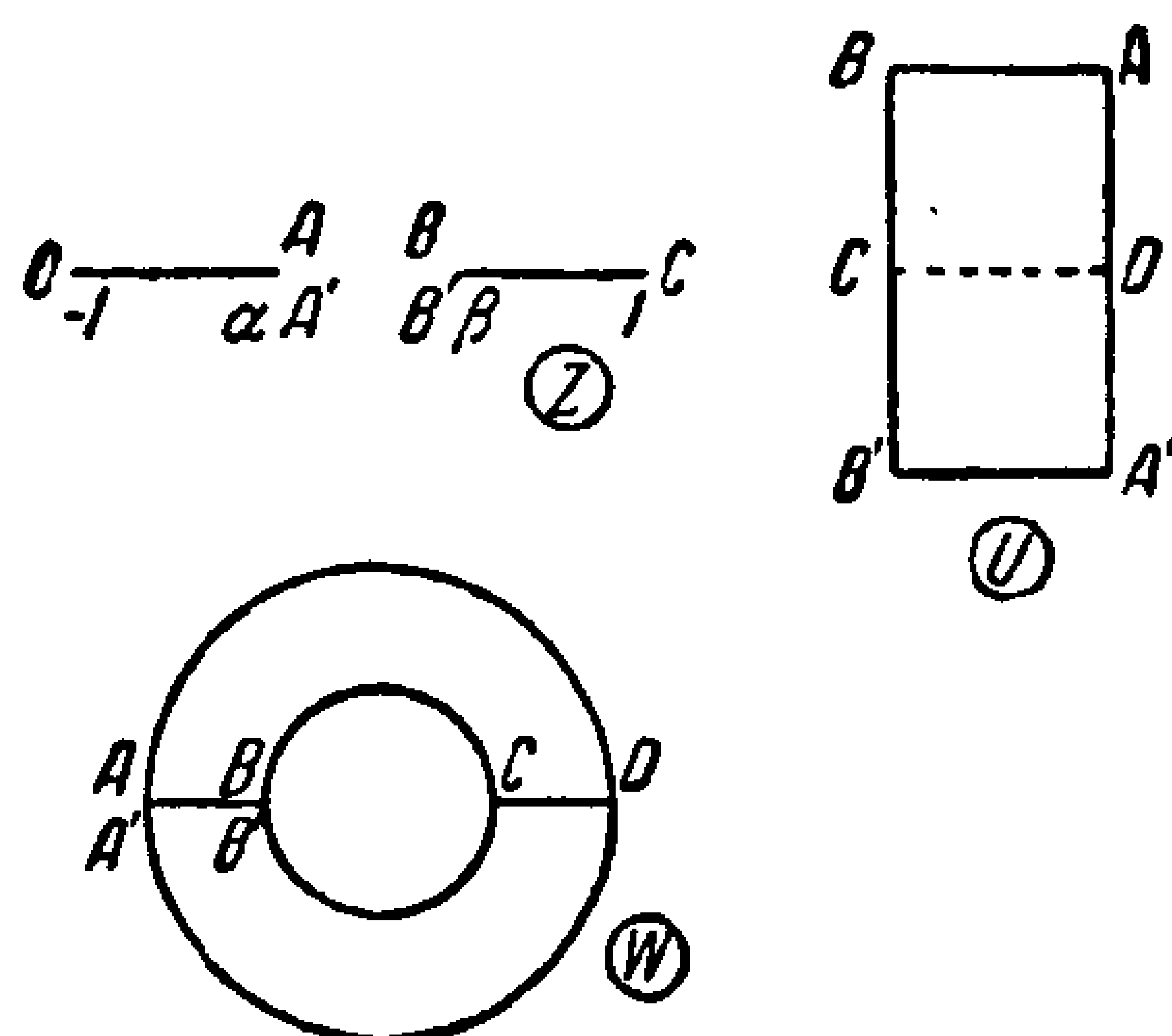


圖 24.

由此可見，公式

$$z=\alpha+\frac{1-\alpha^2}{2\,\mathrm{sn}^2\frac{K'\ln w}{\pi}+\alpha-1}。$$

給出欲求的將沿線段 (10) 切斷了的 z 平面寫像在 w 平面上圓環形的寫像。

第九章　可應用橢圓函數變換的分式的極端性質

49．問題的提出　1877 年秦勞塔廖夫(Е. И. Золотарёв)在"俄羅斯科學院記錄"上發表一篇巨大論文，標題是"橢圓函數應用於與零偏差最小及最大的函數問題"。

秦勞塔廖夫在他的論文的開始寫道：

"雖然橢圓函數在數論、幾何及力學方面的應用已經有了，而且是極其巧妙的，但我認爲橢圓函數理論在應用方面還留着很多的希望。

"所以我認爲，研究一些用橢圓函數論的基本公式來解的關於最小量的問題不是多餘的事。這些問題屬於哪一類關於最少量的問題，它們的解法是契貝雪夫(П. Л. Чебышев)首先給出的。"

秦勞塔廖夫提出並解答了四個問題。前兩個問題是關於多項式的，而第三及第四問題則是關於有理分式的。最後的兩個問題就數學以及它們對於某些近代的電工學計算來說都是值得特別注意的[①]。對於這些問題連結着一系列另外的問題，特別是契貝雪夫的一個問題，他在秦勞塔廖夫的十二年以後才解出。

本節我們將表述問題，且確定它們中間的關係[②]。在下節內將給與解答。量

---

① 我們可看考埃爾(В. Кауэр)關於電氣濾序器的理論及計算的著作。

② 這裏我引用自己的論文"關於 Е. И. 秦勞塔廖夫的一個問題"(蘇聯科學院通報 1929)，以及在 1933 及 1935 年哈里考夫數學通報上的兩個附註。

$$\max_{[a,b]}|f(x)-g(x)|,$$

叫做連續函數 $g(x)$ 對於連續函數 $f(x)$ 在有限或無限的閉區間 $[a, b]$ 內的偏差[①]。

就我們的目的來說，爲方便起見，將兩個區間 $[-\infty, \alpha]$，$[\beta, \infty]$ 的集合看成一個(反平常)區間，其中 $\alpha<\beta$。這樣的區間我們用 $[\beta, \alpha]$ 表示。這樣若 $a<b$，則 $[a, b]$ 是平常區間，若 $a>b$，則 $[a, b]$ 是反平常區間。

設在實軸上給與兩個沒有共同點的閉區間 I_1, I_2。這兩個區間中的一個可包含無限遠點作它的內點或境界點。

問題 A* 試在全體的實函數 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 中，其中 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是 n 次多項式，求出一個函數，使在由區間 I_1, I_2 組成的點集合內與函數

$$h(x)=\begin{cases}-1 & (x\in I_1)\\ 1 & (x\in I_2)\end{cases}$$

有最小偏差。

問題 B* 在數軸上給與不包含點零的有限或無限閉區間 E。考察全體的在區間 I_2 內取區間 E 內的值的 n 次有理分式。試在這些分式中求出那個在區間 I_1 內與零有最小偏差的函數。

問題 A* 在本質上與聚勞塔廖夫第四問題相同，而問題 B* 則與第三問題相同。

問題 C* 在全部的實函數 $\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}$ 內，其中 $\Phi(x)$、$\Psi(x)$ 是 r 次多項式，試求出那個使比

$$\sqrt{x}:\ \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}$$

① 可以考察不在區間內，而在數軸上某一另外的閉集合，例如由兩個區間所組成的集合內的偏差。

的對數在給與區間$\left[1, \frac{1}{k^2}\right]$與零的偏差最小的函數，其中$0<k<1$。

這是契貝雪夫問題。

在問題 A^* 及 B^* 內是任意的區間。但給與 x 分式線形變換，我們可以導出任意的完全確定的區間以替代這些區間。

故可取下邊的問題以替代問題 A^*。

問題 A. 在全體的實函數

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

內，其中 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是 n 次多項式，試求出一個在兩個區間：

$$(1)\qquad \left[-\frac{1}{k}, -1\right], \left[1, \frac{1}{k}\right] \quad (0<k<1)$$

所組成的集合中與函數

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}-1 & (x<0), \\ 1 & (x>0)\end{cases}$$

有最小偏差的函數。

在問題 B^* 內研究的對象是某個不等式，它必須爲在區間 I_2 內的函數所滿足。將函數也做分式線形變換，則可將問題 B^* 化爲下邊的問題。

問題 B. 在全體的 n 次實有理分式

$$z=\frac{f(t)}{g(t)}$$

內，它在區間$\left[\frac{1}{\varkappa}, -\frac{1}{\varkappa}\right]$$(0<\varkappa<1)$滿足於不等式

$$|z|\geqslant 1,$$

試求出一個函數，使它在區間$[-1, 1]$內與零有最小的偏差。

我們現在指出：問題 A、B 中的一個，可以化爲其他一個。

命不可約的分式

$$z=\frac{f_0(t)}{g_0(t)}$$

是問題 B 的解。容易看出，多項式 $f_0(t)$ 恰爲 n 次。事實上，若 $f_0(t)$ 的次數低於 n，則函數

$$\tilde{z}=\frac{\varkappa t f_0(t)}{g_0(t)}$$

也是 n 次有理分式，且在區間 $\left[\frac{1}{\varkappa},\ -\frac{1}{\varkappa}\right]$ 內我們仍然有不等式

$$|\tilde{z}|\geqslant 1。$$

同時在區間 $[-1, 1]$ 內有

$$\max|\tilde{z}|\leqslant\varkappa\max|z|<\max|z|,$$

這表明，z 不是問題 B 的解。

還容易看出，

$$\min_{\left[\frac{1}{\varkappa},\ -\frac{1}{\varkappa}\right]}|z|=1。$$

命

$$\max_{[-1,1]}|z|=m。$$

數 m 一定小於 1，像函數 $z=\varkappa t$ 那樣，它滿足於問題 B 的條件。命

$$y=\frac{1-m}{1+m}\ \frac{z-\sqrt{m}}{z+\sqrt{m}},$$

$$x=\frac{1+\sqrt{\varkappa}}{1-\sqrt{\varkappa}}\ \frac{t\sqrt{\varkappa}-1}{t\sqrt{\varkappa}+1},$$

$$k=\left(\frac{1-\sqrt{\varkappa}}{1+\sqrt{\varkappa}}\right)^2。$$

若 $-1\leqslant t\leqslant 1$，則 $-\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant -1$；同樣，若 $|t|\geqslant\frac{1}{\varkappa}$，則 $1\leqslant x\leqslant\frac{1}{k}$。

這樣，在 x 軸上我們有兩個區間：

$$\left[-\frac{1}{k},\ -1\right],\ \left[1,\ \frac{1}{k}\right]。\tag{1}$$

在第一區間內，按照條件

$$\max|z|=m,$$

但因

$$y+1=\frac{2(z+m\sqrt{m})}{(1+m)(z+\sqrt{m})},$$

故在第一區間有

$$\max|y+1|=\frac{2\sqrt{m}}{1+m}。$$

在第二個區間內，如我們所知道的，

$$\min|z|=1。$$

故在第二個區間內，有

$$\max|y-1|=\frac{2\sqrt{m}}{1+m}。$$

我們看出，函數 y 與 $\operatorname{sign} x$ 在區間（1）內的偏差等於

$$\mu=\frac{2\sqrt{m}}{1+m},$$

μ 在區間(0, 1)是 m 的單調增函數。

由此我們看出，$y=y(x)$ 是問題 A 的解。這樣，有了問題 B 的解，容易得出問題 A 的解。反之，設知道問題 A 的解 $y=y(x)$，則容易求出問題 B 的解 $z=z(t)$。

由上述所作出的多項式 $f_0(t)$ 的次數恰等於 n 的那個結論，推得下一命題：假定不可約分式

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

是問題 A 的解，則在函數 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 中至少有一個的次數恰是 n 次。

命不可約分式

$$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

是問題 A 的解。用

$$x_1<x_2<\cdots<x_q \tag{2}$$

表明屬於區間（1）內一列的點，在這些點上，差

$$y-\operatorname{sign} x$$

取其在這些區間內正負相間的最大數值 μ：

$$\mu=\max|y-\operatorname{sign} x|。$$

容易看出 $\mu<1$。我們將證明，數 q 不能小於 $2n+2$。

命 x_p 是數列(2)內在區間 $\left[-\frac{1}{k},\ -1\right]$ 內最後的一點，x_{p+1} 是區間 $\left[1,\ \frac{1}{k}\right]$ 內最初的一點。在這樣的情形，量

$$y(x_p)+1,\quad y(x_{p+1})-1$$

具有相反的符號。

用點

$$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{p-1}$$

分割區間 $\left[-\frac{1}{k},\ -1\right]$ 及用點

$$\xi_{p+1}<\xi_{p+2}<\cdots<\xi_{q-1}$$

分割區間 $\left[1,\ \frac{1}{k}\right]$ 爲部份區間，在這一列區間裏邊有下邊的不等式之一成立：

$$-\mu\leqslant y-\operatorname{sign} x<\mu-\alpha,$$

$$-\mu+\alpha<y-\operatorname{sign} x\leqslant\mu。$$

然後作出函數

$$\Omega(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{p-1})x\cdot$$

$$\cdot(x-\xi_{p+1})(x-\xi_{p+2})\cdots(x-\xi_{q-1}),$$

它的次數是 $q-1\leqslant 2n$，若有相反的情形，就必須證明 $q<2n+2$。

因爲 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 沒有共同的因子，且這些函數中至少有一個恰是 n 次的，故可求出兩個次數不高於 n 的多項式 $\varphi_1(x)$ 及 $\psi_1(x)$，使

$$\Omega(x)=\varphi_1(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi_1(x)。$$

今導出函數

$$\tilde{y}=\frac{\varphi(x)-\theta\varphi_1(x)}{\psi(x)-\theta\psi_1(x)},$$

其中 θ 是實參數，且研究下式

$$\tilde{y}-\operatorname{sign} x=\frac{\varphi(x)-\theta\varphi_1(x)}{\psi(x)-\theta\psi_1(x)}-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+\{y-\operatorname{sign} x\}=$$
$$=\{y-\operatorname{sign} x\}-\frac{\theta\Omega(x)}{\psi(x)[\psi(x)-\theta\psi_1(x)]}。$$

由題設，函數 $\psi(x)$ 在區間(1)不能變爲零，故對於充分小的 $|\theta|$ 有

$$\psi(x)[\psi(x)-\theta\psi_1(x)]>\sqrt{|\theta|}。$$

按照函數 $\Omega(x)$ 的性質，可以給與充分小的以量 θ 作模的數，使在區間(1)內下邊的不等式成立

$$|\tilde{y}-\operatorname{sign} x|<\mu,$$

這就證明了我們的斷言。

現在再談幾個推理：

(a)若 $R(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 是問題 A 的解，則方程

$$\{R(x)-\operatorname{sign} x\}^2=\mu^2 \tag{3}$$

具有單根 $-\dfrac{1}{k}$、-1、1、$\dfrac{1}{k}$；這一方程在區間(1)內的根（這些根的總數目是 $2n-2$）全是雙重根。

(b)若 $R(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 是問題 A 的解，則在區間 $(-1, 1)$ 內方程

$$\varphi(x)=0,\quad \psi(x)=0$$

祇能有一個根。

事實上，在相反的情形，函數 $|R(x)|$ 若在區間 $(-1, 1)$ 內取值 $1-\mu$、$1+\mu$，則方程(3)在區間(1)內根的數目將少於 $2n+2$。

注意，除

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

而外，

$$(1-\mu^2)\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

也是問題 A 的解。

由此根據(b)得，我們可以只求那些在區間$(-1, 1)$內不變爲無窮大的解。

這樣的有限解是唯一的。事實上，假定有兩個解：

$$(4)\qquad \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\quad \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

且命

$$x_1<x_2<\cdots<x_{2n+2}$$

爲第一個解的"偏差點"。取差

$$\Delta(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}-\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}=$$

$$=\left\{\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}-\operatorname{sign} x\right\}-\left\{\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}-\operatorname{sign} x\right\}=\Delta_1(x)-\Delta_2(x)。$$

命 $\Delta_1(x_1)=\varepsilon\mu,\ \Delta_1(x_2)=-\varepsilon\mu,\ \Delta_1(x_3)=\varepsilon\mu,\ \cdots,$

其中$\varepsilon=\pm1$。另一方面，

$$|\Delta_2(x_k)|\leqslant\mu\qquad(k=1, 2, \cdots, 2n+2)。$$

故量$\Delta(x_k)$或者等於零，或是與$\Delta_1(x_k)$有相同的號，據此容易看出來，$\Delta(x)$在區間$\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$內至少有$2n+1$個根。但因

$$\Delta(x)=\frac{\varphi_1(x)\psi_2(x)-\varphi_2(x)\psi_1(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)},$$

其中分子 $\varphi_1(x)\psi_2(x)-\varphi_2(x)\psi_1(x)$

是$2n$次的多項式，故式$\Delta(x)$恆等於零，卽解(4)不能互異。

今容易看出，問題A的解可能衹是奇函數。事實上，命

$$(5)\qquad R(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

是問題A在區間$(-1, 1)$內是有限的解。容易看出，函數

$$(6)\qquad -R(-x)=-\frac{\varphi(-x)}{\psi(-x)}$$

也是同樣的解。故函數(5)，(6)恆等。

照所述的事實不難證明問題A及C*的等價性。

爲此目的，示明如下：設

$$\max|\ln Y|=\ln H,$$

則 $$\max\left|1-\frac{2H}{H^2+1}Y\right|=\frac{H^2-1}{H^2+1},$$

且設 $$\max|1-y|=G<1,$$

則 $$\max\left|\ln\frac{y}{\sqrt{1-G^2}}\right|=\frac{1}{2}\ln\frac{1+G}{1-G}。$$

故問題 C* 等價於

問題 C. 在全體實函數

$$Y=\sqrt{x}\frac{\Psi(x)}{\Phi(x)}$$

內，其中 $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ 是 r 次多項式；試求出一個函數，使在區間 $\left[1,\ \frac{1}{k^2}\right]$ 內與 1 的偏差最小。

令命 $x=X^2$。這時代替區間 $\left[1,\ \frac{1}{k^2}\right]$ 可取下邊兩個區間

$$\left[-\frac{1}{k},\ -1\right],\ \left[1,\ \frac{1}{k}\right]。$$

我們的函數變爲

$$Y=\frac{X\Psi(X^2)}{\Phi(X^2)},$$

但量 $$\max_{\left[1,\frac{1}{k^2}\right]}\left|1-\frac{\sqrt{x}\Psi(x)}{\Phi(x)}\right|,$$

顯然等於 $$\max_{\left[-\frac{1}{k},-1\right],\left[1,\frac{1}{k}\right]}\left|\operatorname{sign}X-\frac{X\Psi(X^2)}{\Phi(X^2)}\right|。$$

我們曾經在條件 $n=2r$ 或 $n=2r+1$ 之下談過問題 A。

相反的過程(由問題 A 變到問題 C)更簡單。

根據本節的研究，一切問題可化爲解問題 C。

50. 問題 C 的解　問題 C 的解可由契貝雪夫的一個普遍定理得出，此定理如下：

假定給與有限的閉區間 $[a,\ b]$ 及在其中連續的兩個函數 $f(x)$

及 $s(x)$，內中的第二個不能變爲零。考察具有以下形狀的式子：

$$W(x)=s(x)\frac{q_0x^n+q_1x^{n-1}+\cdots+q_n}{p_0x^m+p_1x^{m-1}+\cdots+p_m},$$

其中 m 及 n 是已知的。若兩個公式經過簡約後能變爲一樣的，就認爲是相同的話，則這些函數 $W(x)$ 中一函數與函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內具有最小偏差而是唯一的。

若這一函數具有以下的形狀：

$$P(x)=s(x)\frac{B(x)}{A(x)}=s(x)\frac{b_0x^{n-\nu}+b_1x^{n-\nu-1}+\cdots+b_{n-\nu}}{a_0x^{m-\mu}+a_1x^{m-\mu-1}+\cdots+a_{m-\mu}},$$

(其中 $0\leqslant\mu\leqslant m$，$0\leqslant\nu\leqslant n$，$a_0\neq0$ 且分式 $\frac{B(x)}{A(x)}$ 不可約)，則區間 $[a, b]$ 內使具有不同符號的差 $f(x)-P(x)$ 在 $[a, b]$ 內取它的極大值的相隣之點的個數不少於 $m+n-d+2$，其中 $d=\min\{\mu, \nu\}$。這一性質完全區別出極端函數 $P(x)$。

以後，祇是定理中斷言："當滿足所述的特徵條件時，函數 $P(x)$ 與 $f(x)$ 的偏差最小"是重要的。這用與上節證明問題 A 的特殊情形(它沒有多於一個解)的方法相同的方法，容易證明。

我們不必證明解的存在。因爲對於我們有興趣的是實際上關於解的構造①。

在問題C的情形，區間 $[a, b]$ 是 $\left[1, \frac{1}{k^2}\right]$，並且 $f(x)=1$，$s(x)=$ $=\sqrt{x}$，$m=n=r$。茲引出問題的解的參數形式。它由公式

$$x=\operatorname{sn}^2(u;\ k),\quad Y=\frac{2\lambda}{1+\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)$$

給出，其中

$$L=\frac{K}{M},\quad L'=\frac{K'}{(2r+1)M},$$

這樣，Y 是 x 的那樣的一個函數，用 $2r+1$ 除第二週期，就可得到。

① 關於所引定理的詳細情形，讀者在 Н. И. 阿希澤爾，"近似法理論講義"(ОНТИ，1947 年)一書內可找出來。

在證明之前，首先轉到表 XXIII，按照該表有

$$Y=\frac{2\lambda}{1+\lambda}\frac{\operatorname{sn}(u;k)}{M}\prod_{\alpha=1}^{r}\frac{1+\dfrac{\operatorname{sn}^2(u;k)}{c_{2\alpha}}}{1+\dfrac{\operatorname{sn}^2(u;k)}{c_{2\alpha-1}}},$$

其中
$$c_\alpha=\frac{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{\alpha}{2r+1}K';\ k'\right)}{cn^2\left(\dfrac{\alpha}{2r+1}K';\ k'\right)}。$$

故
$$Y=\frac{2\lambda}{1+\lambda}\frac{\sqrt{x}}{M}\prod_{\alpha=1}^{r}\frac{1+\dfrac{x}{c_{2\alpha}}}{1+\dfrac{x}{c_{2\alpha-1}}},$$

由此得到Y具有欲求的形狀。

現今應當研究當x在區間$\left[1,\ \dfrac{1}{k^2}\right]$時的差$1-Y$。

命
$$u=K+iv,$$

這時有
$$x=\operatorname{sn}^2(u;k)=\frac{\operatorname{cn}^2(iv;k)}{\operatorname{dn}^2(iv;k)}=\frac{1}{\operatorname{dn}^2(v;k')}。$$

我們使 v 由 0 增大到 K'。這時 $\operatorname{dn}^2(v;k')$ 將由 1 減小到 $1-k'^2=k^2$，這就意味着x由 1 增大到 $\dfrac{1}{k^2}$。這就是x變化的區間。

今取差
$$\Delta(x)=1-Y,$$

它等於

$$\Delta(x)=1-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{K+iv}{M};\ \lambda\right)=$$
$$=1-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{\operatorname{dn}\left(\dfrac{v}{M};\ \lambda'\right)}=1-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{\operatorname{dn}(w;\lambda')}。$$

命v由 0 增加到K'。這就意味着，w 由 0 增加到$(2r+1)L'$。函數 $\operatorname{dn}(w;\lambda')$ 恆在 1 與$\sqrt{1-\lambda'^2}=\lambda$之間。同時在點

$$w=0,\ L',\ 2L',\ \cdots,\ 2rL',\ (2r+1)L'$$

處它具有值 $1, \lambda, 1, \lambda, \cdots, 1, \lambda$。

$\Delta(x)$的相當的值等於

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad -\frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \cdots, -\frac{1-\lambda}{1+\lambda}。$$

這樣,差 $1-Y$

在區間$\left[1, \frac{1}{k^2}\right]$內 $2r+2$ 個相鄰的點

$$x_0=1, \; x_1=\frac{1}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{K'}{2r+1};\, k'\right)}, \quad x_2=\frac{1}{\operatorname{dn}^2\left(\frac{2K'}{2r+1};\, k'\right)}, \cdots$$

處取它的最大的數值

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}。$$

證明完了。

由得到的問題C的解出發,且利用適當的分式線形變換,可得

表 1

號數	$s(x)$	a	b	i	j
1	$\sqrt{1-k^2x}$	0	1	m	m
2	$\sqrt{1-k^2x}$	0	1	$m-1$	m
3	$\sqrt{\frac{x}{x-1}}$	$\frac{1}{k^2}$	∞	m	m
4	$\sqrt{x(x-1)}$	$\frac{1}{k^2}$	∞	$m-1$	m
5	$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$	$\frac{1}{k}$	$-\frac{1}{k}$	m	m
6	$\sqrt{\frac{1+kx}{1-kx}}$	-1	1	m	m
7	$\sqrt{x}$	1	$\frac{1}{k^2}$	m	m
8	$\sqrt{x}$	1	$\frac{1}{k^2}$	$m-1$	m

到一系列其他問題的解。

我們在這裏祇限定敘述某些結果。

表 2

號數	y	n	G
1	$\frac{2}{1+\lambda'}\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K;\,k\right)x}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K;\,k\right)x}$	$2m+1$	$\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$
2	$\frac{2\lambda'}{1+\lambda'}\frac{\prod_{\alpha=1}^{m-1}1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K;\,k\right)x}{\prod_{\alpha=1}^{m}1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K;\,k\right)x}$	$2m$	$\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$
3	$\frac{2\lambda'}{1+\lambda'}\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K;\,k\right)-x}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K;\,k\right)-x}$	$2m+1$	$\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$
4	$-\frac{2\lambda'}{1+\lambda'}\frac{\prod_{\alpha=1}^{m-1}\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n}K;\,k\right)-x}{\prod_{\alpha=1}^{m}\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha-1}{n}K;\,k\right)-x}$	$2m$	$\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}$
5	$\lambda'\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{x+\mathrm{sn}\left(K-\frac{4\alpha}{n}K;\,k\right)}{x-\mathrm{sn}\left(K-\frac{4\alpha}{n}K;\,k\right)}$	$2m+1$	λ
6	$\lambda'\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{1+kx\,\mathrm{sn}\left(K-\frac{4\alpha}{n}K;\,k\right)}{1-kx\,\mathrm{sn}\left(K-\frac{4\alpha}{n}K;\,k\right)}$	$2m+1$	λ
7	$\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1}\frac{1}{M_1}\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{1+\frac{x}{c_{2\alpha}}}{1+\frac{x}{c_{2\alpha-1}}}$	$2m+1$	$\frac{1-\lambda_1'}{1+\lambda_1'}$
8	$\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1}\frac{1}{M_1}\frac{\prod_{\alpha=1}^{m-1}1+\frac{x}{c_{2\alpha}}}{\prod_{\alpha=1}^{m}1+\frac{x}{c_{2\alpha-1}}}$	$2m$	$\frac{1-\lambda_1'}{1+\lambda_1'}$

附註　這裏採用記號

$$c_\alpha=\frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha K'}{n};\,k'\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\frac{\alpha K'}{n};\,k'\right)}。$$

命被考察的實有理函數 $R_{i,j}(x)$ 的分子的次數是 i，分母的次數是 j。在這些函數內求出一個，使量

$$s(x)R_{i,j}(x)$$

在區間[a, b]和 1 有最小的偏差的函數。這樣，問題是用函數 $R_{i,j}(x)$ 以漸近函數 $\frac{1}{s(x)}$ 使相對誤差在區間[a, b]內的極大值有最小值。

同時問題的數據包含在表 1 內。

用 y 表明欲求的解，此外並命

$$G=\max_{[a,\,b]}|1-s(x)y|。$$

所考察的問題的解在表 2 內。同時用 λ（相應用 λ_1）表示橢圓函數的模，我們用第一個（相應用第二個）週期除以 n，卽可得到它。

第十章　各種補充和應用

51. 阿倍爾定理　設給與不可約的代數方程，卽具以下形狀的方程

(1)
$$F(z, w)=0,$$
其中 $F(z, w)$ 是關於 z 及 w 的多項式，它不能分解成多項式的因子。這一方程確定 w 是 z 的某一個代數函數：
$$w=w(z)。$$
$w(z)$ 不是 z 的單值函數，例外的情形是當方程(1)關於 w 是一次時 $w(z)$ 才是單值函數。但假定取屬於(1)的多葉的面——黎曼面以替代複數平面，則 w 可作成點的單值函數。在這一面上對於 z 與 w 的所有有理函數 $R(z, w)$ 將與 w 一起是單值的。

假定我們不採用上述的黎曼面，而仍在複數平面上研究，則當研究函數 $w(z)$，以及函數 $R(z, w)$ 時，在 z 平面上作確定的切口且單獨研究函數 $w(z)$ 或函數 $R(z, w)$ 的每一枝。

特別簡單的情形是當方程(1)具有以下形狀的時候：

(2)
$$w^2=A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+2})$$
或

(2bis)
$$w^2=A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1}),$$
其中全體的 α_i (分歧點)彼此互異。若 $p=1$，我們得到橢圓的情形；對於 $p>1$ 通常叫做超橢圓的情形。

這裏的黎曼面是由二葉構成的。α_i 是分歧點。可以任意挑選不同的改換線，只要它們不相交就可以。例如，在方程(2)的情形，可取弧線 $\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}(k=1, 2, \cdots, p+1)$ 作爲改換線。若我們分

別研究函數 w 兩分枝的每一分枝，則可利用沿這些弧線切斷後的平面。

若以 $P=1$ 時的方程（2）或 (2bis) 作為基礎，則具有以下形狀的積分：

$$\int R(z,\ w)dz \tag{3}$$

像我們所知道的，叫做橢圓積分。當 $p>1$ 時它們叫做超橢圓積分。

橢圓和超橢圓積分，以及初等的積分

$$\int R(z,\ \sqrt{az^2+bz+c})\,dz$$

都是阿倍爾積分的特殊情形，它一般地應被了解為形狀如（3）的積分，其中 w 及 z 由不可約的代數方程（1）聯繫着。

沿某一線的阿倍爾積分的值，不祇依賴於其始點及終點，且也依賴於線的本身，或所謂依賴於積分路。若積分的上限認為是變動的，則積分將為上限的多值函數。

例如，我們已知積分

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$$

的不同數值，彼此間相差之量具有以下形狀：

$$2m\omega+2m'\omega',$$

其中 m、m' 是整數，而 ω、ω' 是某二個常數。

屬於給與方程的阿倍爾積分，可劃分為三組。這一劃分和我們對於橢圓積分的劃分相似。

阿倍爾積分的分類根據以下的原則：設積分到處是有限的，則叫做第一種積分；若在一點積分變為無窮大，且有代數的奇異點，則叫做第二種積分；最後，若在兩點有對數性的奇異點則叫做第三種積分。

記起 §§ 29, 30，讀者容易驗證，各種橢圓積分可由剛才所說的性質區分出來。

在這裏我們不能涉及阿倍爾積分的一般理論的各種問題。但有一個定理，在橢圓函數論的教程內不能不加以說明。這是阿倍爾定理。

假定不可約方程（1）是已知的，它可確定一代數函數 $w(z)$，命 $R(z, w)$ 爲已知的有理函數，此外再給與第二個代數方程

$$G(z, w)=0。\tag{4}$$

用

$$a_1, a_2, \cdots, a_\mu$$

表明多項式 $G(z, w)$ 的係數，且將它們看成變量。由方程（1）及（4）藉助於有理的運算可消去量 w。

我們將得出方程

$$\varphi(z)=0,\tag{5}$$

其中 $\varphi(z)$ 是多項式，它的係數與 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ 有有理式的關係。命

$$z_1, z_2, \cdots, z_N$$

是方程（5）的全體的根。由這些根求出數對

$$(z_1, w_1), (z_2, w_2), \cdots, (z_N, w_N),$$

使其滿足於方程（1）及（4）。它們連續地依賴於參數 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$。此外，由代數學可知，這些數對的每個有理對稱函數都是方程（1）及（4）的係數的有理函數，即結局是 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ 的有理函數。

取滿足方程（1）的數對 (z_0, w_0)，且將

$$\int_{(z_0, w_0)}^{(z, w)} R(z, w)\,dz$$

理解爲函數 $R(z, w)$ 沿某一路線的積分，這一路線在 z 平面內由

點 z_0 到點 z。爲簡單起見，命點 z_0 不是函數 w 的分歧點，且在積分路上也沒有函數 w 的分歧點，並且也沒有點使函數 $R(z, w)$ 變爲無窮大。至於談到 w，則在點 z_0 我們挑選任一個許可的值 w，但對於以後的點的確定應保持連續性。

考察以下的和

$$V=\sum_{k=1}^{N}\int_{(z_0, w_0)}^{(z_k, w_k)} R(z, w)dz。$$

這個和顯然依賴於參數 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ 的值。假定這些參數連續變化，則數對 (z_k, w_k) 亦將連續地變化，而某些積分的道路也需要改變。

阿倍爾定理斷定，量 V 等於參數 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ 的有理函數，與同樣函數的對數之和相加，再乘以常數。

想要證明這一定理，使參數 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ 變化且求函數 V 的微分。它等於

$$dV=\sum_{k=1}^{N} R(z_k, w_k)\left(\frac{\partial z_k}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial z_k}{\partial a_2}da_2+\cdots+\frac{\partial z_k}{\partial a_\mu}da_\mu\right)。$$

在另一方面，把恆等式

$$\varphi(z_k)=0,$$

關於 a_λ 微分，得

$$\frac{\partial\varphi(z_k)}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial a_\lambda}+\frac{\partial\varphi(z_k)}{\partial a_\lambda}=0,$$

由此得

$$\frac{\partial z_k}{\partial a_\lambda}=-\frac{\dfrac{\partial\varphi(z_k)}{\partial a_\lambda}}{\dfrac{\partial\varphi(z_k)}{\partial z_k}}=\rho_\lambda(z_k),$$

其中 $\rho_\lambda(z_k)$ 是 z_k 及參數 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ 的有理函數。

現今我們可以把 dV 化爲以下的形狀：

$$dV=\sum_{\lambda=1}^{\mu} da_\lambda\left\{\sum_{k=1}^{N} R(z_k, w_k)\rho_\lambda(z_k)\right\}。$$

量
$$\sum_{k=1}^{N} R(z_k, w_k)\rho_\lambda(z_k)$$
是參數 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ 的有理函數且爲數對 (z_k, w_k) 的有理對稱函數。故這一量是參數 $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ 的有理函數:
$$\sum_{k=1}^{N} R(z_k, w_k)\rho_\lambda(z_k) = R_\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_\mu)。$$
想要得出 V，必須積分下邊的全微分方程:
$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} R_\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_\mu)da_\lambda。$$
這一積分導出參數的有理函數，加以同樣函數的對數，再乘以某常數。這樣阿倍爾定理證明完結。

函數 $\wp$ 的加法定理可用以說明阿倍爾定理。

這時，方程
$$w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$$
起着(1)的作用。作爲(4)取方程
$$w = a_1z + a_2。$$
最後命積分是
$$\int \frac{dz}{w}。$$
方程(5)取以下的形狀:

(6) $$\varphi(z) \equiv 4z^3 - g_2z - g_3 - (a_1z + a_2)^2 = 0。$$

我們需要考察量
$$V = \int_\infty^{(z_1, w_1)} \frac{dz}{w} + \int_\infty^{(z_2, w_2)} \frac{dz}{w} + \int_\infty^{(z_3, w_3)} \frac{dz}{w},$$
其中 z_1、z_2、z_3 是方程(6)的根，由題設它們是互異的[①]。根據阿倍爾定理斷定，V 是參數 a_1、a_2 的有理函數，加以同樣函數的對數，再乘以某些常數。現今我們必須實地求出這一函數 $V(a_1, a_2)$。我們有

① 對於參數 a_1、a_2 之間的特殊關係可得出例外。

$$dV=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{w_k}\frac{\partial z_k}{\partial a_1}da_1+\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{w_k}\frac{\partial z_k}{\partial a_2}da_2=R_1\,da_1+R_2\,da_2。$$

微分方程(6),得出

$$\frac{\partial z_k}{\partial a_1}=\frac{2z_k w_k}{\varphi'(z_k)},\quad \frac{\partial z_k}{\partial a_2}=\frac{2w_k}{\varphi'(z_k)}。$$

故 $$R_1=2\sum_{k=1}^{3}\frac{z_k}{\varphi'(z_k)},\quad R_2=2\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\varphi'(z_k)}。$$

這兩個和的每一個,都容易驗證,等於零。事實上由拉果郎諸(Lagrange)內插法公式

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\psi(z_k)}{(z-z_k)\varphi'(z_k)}=\frac{\psi(z)}{\varphi(z)},$$

其中 $\psi(z)$ 是任意的次數 $\leqslant 2$ 的多項式。我們假定,$\psi(z)$ 是次數 $\leqslant 1$ 的多項式。在這一情形,兩邊各乘以 z,再命 $z\to\infty$,得

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\psi(z_k)}{\varphi'(z_k)}=0。$$

由此得 $$R_1=R_2=0。$$

這樣,V 與 a_1、a_2 無關,即 V 是常數。設“直線”

$$w=a_1z+a_2$$

趨於無限遠,則三根 z_1、z_2、z_3 亦趨於無限遠;故 V 中的每一個積分都趨於零,或更一般地說趨於一週期。於是

$$\int_{\infty}^{(z_1,\,w_1)}\frac{dz}{w}+\int_{\infty}^{(z_2,\,w_2)}\frac{dz}{w}+\int_{\infty}^{(z_3,\,w_3)}\frac{dz}{w}=2m\omega+2m'\omega'。$$

命 $$z_1=\wp(u_1),\quad z_2=\wp(u_2),\quad z_3=\wp(u_3),$$

$$w_1=\wp'(u_1),\quad w_2=\wp'(u_2),\quad w_3=\wp'(u_3)。$$

則這時我們的結果可以表述如下:若

(7) $$u_1+u_2+u_3\equiv 0(\operatorname{mod} 2\omega,\,2\omega')$$ ①

則有兩個常數 a_1、a_2 存在,使

$$\wp'(u_1)=a_1\wp(u_1)+a_2,$$

① 假定 u_k 內沒有一個關於週期作模數與零爲等餘者。

$$\wp'(u_2)=a_1\wp(u_2)+a_2,$$
$$\wp'(u_3)=a_1\wp(u_3)+a_2,$$

換句話說，由(7)得出

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) \\ 1 & \wp(u_3) & \wp'(u_3) \end{vmatrix}=0,$$

這是橢圓函數 $\wp$ 的加法定理的形式的一個。

可以證明，其他的加法定理（例如函數 ζ 的加法定理）被包含在阿倍爾定理內，作爲特殊情形。

自然，當談到較複雜的阿倍爾積分且首先談到超橢圓積分時，這一定理有特殊的意義，但我們不去講它了。

52. 圓環內的格林 (Green) 函數　假定在複變數 w 平面內已知圓環 G，它用圓

$$|w|=1, \quad |w|=h$$

作境界，其中假定正數 h 小於 1，再命 c 爲環形 G 內某已知點，我們可不失掉任何普遍性，使點 c 在正的半實軸上，而使 $h<c<1$。

作出想要求的解析函數 $f(w)$，使其滿足以下條件：

(a) $f(w)$ 在領域 G 內及其境界上爲正則的，

(b) $|f(w)|$ 在 G 內爲單值函數，

(c) $|f(w)|$ 在圓環 G 的境界上等於 1，

(d) $f(w)$ 在點 $w=c$ 處具有一級的零點，但在領域 G 內其他點不能爲零。

容易看出

$$\Re \ln f(w)=\ln|f(w)|$$

不是別的，而是對於圓環領域 G 的格林函數。故對函數 $f(w)$ 的存在不應有任何的懷疑。並且，假定除去用 1 作模數的任意常數因子以外，被確定的函數 $f(w)$ 是單值的。

函數$f(w)$有時叫做關於考察的圓環的格林復函數。

命
$$w_0=\frac{1}{\overline{w}},\quad w_1=\frac{h^2}{\overline{w}}。$$

點w_0是點w關於圓環G的外邊境界的鏡像，而點w_1則是w關於裏邊境界的鏡像。

因爲函數$f(w)$在環形的每一境界上的模數等於1，故它在點w_0、w_1處的值與在點w處的值用下邊的關係聯繫起來：

$$(1)\qquad \begin{cases} f(w)\overline{f(w_0)}=1, \\ f(w)\overline{f(w_1)}=1。\end{cases}$$

由於對稱及數c是實數，得出下列的話，想要使$f(w)$是一實函數，卽想要$f(w)$滿足於關係式
$$\overline{f(\overline{w})}=f(w),$$
可以將遺留下的組成函數$f(w)$的任意的因子適當的選擇。這樣選擇了指定的因子，則上邊的關係式(1)可寫成下邊的形狀

$$(2)\qquad \begin{cases} f(w)f\left(\dfrac{1}{w}\right)=1, \\ f(w)f\left(\dfrac{h^2}{w}\right)=1。\end{cases}$$

用這些等式可將函數$f(w)$解析開拓，先從原始的圓環到另外兩個圓環，這兩個圓環是與圓環G相接連，然後及於全平面，但點$w=0$、$w=\infty$除外。因爲$f(w)$在點c處具有一級零點，故由公式(2)，$f(w)$有一級極點
$$w=\frac{1}{c},\quad w=\frac{h^2}{c}。$$

故再由公式(2)，$f(w)$有一級零點
$$w=\frac{c}{h^2},\quad w=h^2c。$$

這些理由說明了，$f(w)$有一級零點
$$w=h^{2k}c\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

與一級極點　$w=\frac{h^{2k}}{c}\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。

我們顯然知道 $f(w)$ 沒有另外的零點和極點。

根據以上敍述，自然導出下邊函數的研究：

$$F(w)=\frac{\left(1-\frac{w}{c}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-h^{2k}\frac{w}{c}\right)\left(1-h^{2k}\frac{c}{w}\right)}{(1-cw)\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k}cw)\left(1-h^{2k}\frac{1}{cw}\right)},$$

它與 $f(w)$ 有相同的零點和極點。用 $\frac{1}{w}$ 及 $\frac{h^2}{w}$ 分別代替 w，得

$$(3)\qquad \begin{cases} F\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{1}{F(w)}, \\ F\left(\frac{h^2}{w}\right)=\frac{1}{F(w)}. \end{cases}$$

故函數 $F(w)$ 不滿足條件(2)，也就是說，也不滿足條件 c)。

今將示明，可以確定實常數 λ、μ 使函數

$$\mu w^{\lambda}F(w)=F_1(w)$$

滿足條件(2)以及滿足條件 c)。

事實上，如對於函數 $F_1(w)$ 寫出條件(2)，則得

$$\mu w^{\lambda}F(w)\frac{\mu}{w^{\lambda}}F\left(\frac{1}{w}\right)=1,$$

$$\mu w^{\lambda}F(w)\frac{\mu h^{2\lambda}}{w^{\lambda}}F\left(\frac{h^2}{w}\right)=1.$$

根據(3)，這些等式取以下的形狀

$$\mu^2=c^2,$$

$$\mu^2h^{2\lambda}=1,$$

由此得　$\mu=\pm c,\quad \lambda=-\frac{\ln c}{\ln h}$。

故函數　$\pm c w^{-\frac{\ln c}{\ln h}}F(w)$

滿足問題的全部要求。不難用西他函數把它表示出來。對於這所必需的數據包含在表 IX 內。

$f(w)$ 最後的表示式具有以下的形狀

$$f(w)=\pm w^{-\frac{\ln c}{\ln h}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\middle|\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\middle|\tau\right)},\tag{4}$$

其中 $\tau=\frac{1}{\pi i}\ln h$。得到解以後，可以導出 $e^{i\delta}$ 以替代因子 ±1，其中 δ 是任意的實數。

有時函數 $f(w)$ 用另外的表示式較方便，卽將 $-\frac{1}{\tau}$ 代替 τ 所得到的那一個式子。根據表 XVII 內的公式不難得出

$$f(w)=\pm\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)}。\tag{5}$$

53. 關於圓環的吉里赫萊問題 假定在複變數 w 平面內已知圓環 G，它是用圓

$$|w|=1,\quad |w|=h$$

作境界的，其中假定正數 h 小於 1。試求在圓環內爲正則且單值的函數 $F(w)$，但假定在圓環的境界上函數 $F(w)$ 的實數部份的值爲已知。

對於圓的情形，類似的問題由什瓦爾次著名的公式解出了：

$$F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+we^{-is}}{1-we^{-is}}\Phi(s)\,ds+iC。\tag{1}$$

這裏係假定圓的半徑等於 1，而圓周上點的位置由這個點的幅角 s 確定，因此，$\Phi(s)$ 代表欲求的函數在點 e^{is} 處實數部份的值。至於談到 C，則這是一個任意的實常數。

什瓦爾次公式在解析函數論教程中在關於函數 $\Phi(s)$ 極普遍的假設之下來推導和研究。

我們的問題是由圓轉移到圓環，並作一類似於（1）的公式。

命 $\Phi(s)$ 及 $\varphi(s)$ 各表明欲求的函數 $F(w)$ 的實數部份在圓環外邊的及裏邊的境界上的用 s 作幅角的點的那些値。我們不必作函數 $\Phi(s)$、$\varphi(s)$ 很一般的假設，因爲說明由單連通領域變到雙連通領域是我們主要的目的。祇假設函數 $\Phi(s)$ 和 $\varphi(s)$ 分段連續就夠了。

量
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{is})\,ds=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{F(w)}{w}dw,$$

其中右邊的積分取在圓心是點 $w=0$ 半徑是 r $(h<r<1)$ 的圓周上顯然不依賴於 r。寫出的積分的實數部份也具有同樣的性質。故使 r 先趨近於1，然後趨近於 h，並注意在積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re F(re^{is})\,ds$$

內可以取所要求的限，得

$$\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,ds=\int_0^{2\pi}\varphi(s)ds。\tag{2}$$

這樣，這個條件對於解決我們所提出問題是必要的，因而我們應當假設它滿足。

欲求的函數 $F(w)$ 可展成勞郎氏級數

$$F(w)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k w^k。\tag{3}$$

假定這一展開式不祇在 G 的內部成立，且在境界上也成立。取兩邊的實數部份，我們將求得函數 $\Phi(s)$ 及 $\varphi(s)$ 的福里哀級數的展開式。由這些展開式得出係數 a_k 爲某些積分形式。在求出係數 a_k 後，我們把它們代入公式（3）的右邊並作和，結果我們得到下列的公式：

$$\begin{aligned}F(w)=&\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}s\right)ds-\\&-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}s-\omega'\right)ds+iC,\end{aligned}\tag{4}$$

其中 C 是任意的實常數，ω 是任意的正數，而純虛數 ω' 則藉助於等式

$$e^{\pi i\frac{\omega'}{\omega}}=h$$

可求出來，最後 $\zeta(u)=\zeta(u|\omega,\ \omega')$。

現今將證明，公式（4）所確定的函數 $F(w)$ 滿足問題的所有條件。我們卽使引證公式（4）的結論的時候，也不能免去這個證明。因此我們認爲省略所述的結論是可能的。

由公式（4）確定的函數 $F(w)$ 在圓環 G 內部的正則性，是由於在這個圓環內下邊的兩個函數是正則的

$$\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}s\right),\quad \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}s-\omega'\right)。$$

單值性是由關係式（2）推出的結果。事實上，要想說明（4）內的函數的單值性，必須證明，當 w 畫圓周：

$$|w|=r\quad (h<r<1)$$

時，這一函數不改變。其次，（4）的右邊經這樣的圍繞畫圓後取以下的形狀

$$\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}s+2\omega\right)ds-$$
$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}s-\omega'+2\omega\right)ds+iC。$$

但由關係式

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta(u)+2\eta,$$

這個量等於

$$F(w)+\frac{2i\omega}{\pi^2}\eta\left\{\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,ds-\int_0^{2\pi}\varphi(s)\,ds\right\}。$$

根據（2），積分彼此相消，因此得到的式子是 $F(w)$，故單值性證明了。

所餘的是檢驗函數（4）的實數部份在圓環的境界上變成給出的函數。

取圓環 G 的外境界上的點

$$w_0=e^{is_0}$$

及圓環內具有相同的幅角的點

$$w=re^{is_0}\quad (h<r<1)。$$

若祇在點 s_0 處函數 $\Phi(s)$ 是連續的，則我們必須證明

$$\lim_{r\to 1}\Re F(re^{is_0})=\Phi(s_0)。$$

爲此目的，把(4)寫成以下的形狀

$$F(re^{is_0})=\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\frac{1}{\frac{\omega}{\pi i}\ln r+\frac{\omega}{\pi}(s_0-s)}ds+$$

$$+\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\left\{\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln r-\frac{\omega}{\pi}s+\frac{\omega}{\pi}s_0\right)-\frac{1}{\frac{\omega}{\pi i}\ln r+\frac{\omega}{\pi}(s_0-s)}\right\}ds-$$

$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln r-\frac{\omega}{\pi}s+\frac{\omega}{\pi}s_0-\omega'\right)ds+iC=$$

$$=J_1+J_2+J_3+iC。$$

積分 J_2 內大括弧裏邊的式子和積分 J_3 內的且他函數當 $0\leqslant s\leqslant 2\pi$ 時是 r $(h^{\frac{1}{2}}\leqslant r\leqslant 1)$ 的均一連續函數。所以在這兩個積分內可以取 $r\to 1$ 的極限。這時得

$$\lim_{r\to 1}J_2=\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\left\{\zeta\left(\frac{\omega}{\pi}s_0-\frac{\omega}{\pi}s\right)-\frac{\pi}{\omega(s_0-s)}\right\}ds。$$

因爲 ω 和 $\frac{\omega'}{i}$ 全是實數，故大括弧內是實量，但右邊的全部則是純虛量。

同樣可證

$$\lim_{r\to 1}J_3$$

也具有純虛數的值。這樣，

$$\lim_{r\to1}\Re F(re^{is_0})=\lim_{r\to1}\Re\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\frac{ds}{\frac{\omega}{\pi i}\ln r+\frac{\omega}{\pi}(s_0-s)}=$$

$$=\lim_{r\to1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\frac{\ln\frac{1}{r}}{(s-s_0)^2+\ln^2\frac{1}{r}}ds。$$

若照我們的假設，函數 $\Phi(s)$ 在點 s_0 連續，則照已知右邊等於 $\Phi(s_0)$。

同樣可證明，若點 $w=re^{is_0}$ 趨於 he^{is_0}，而 $\varphi(s)$ 在 s_0 是連續，則 $\Re F(w)$ 趨於 $\varphi(s_0)$。

這樣，韋爾 (Weyl) 公式(4)就完全證明了。

54. 橢面坐標 假定三個已知正數 a、b、c 滿足於不等式

$$a>b>c。$$

命 X、Y、Z 表明點的流動坐標，而 s 表明實參數。這時

$$\frac{X^2}{a^2-s}+\frac{Y^2}{b^2-s}+\frac{Z^2}{c^2-s}=1$$

將為二次曲面族的方程，它們與橢面

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

共焦點。同時這一參數 s 的值，當然假定異於 b^2、c^2 且滿足於不等式

$$s<a^2。$$

今假定在空間內取某一點 (x, y, z)。是否經過它能引一個上述族裏的一個曲面？這一問題歸結到以下的方程是否有實根存在的問題：

$$f(s)\equiv1-\frac{x^2}{a^2-s}-\frac{y^2}{b^2-s}-\frac{z^2}{c^2-s}=0。 \tag{2}$$

考察區間

$$(-\infty,\ c^2-\varepsilon),\quad (c^2+\varepsilon,\ b^2-\varepsilon),\quad (b^2+\varepsilon,\ a^2-\varepsilon)。$$

對於充分小的正數 ε，函數在這些區間中的每一個區間內爲連續，但是在兩端具有相反的號。故方程（2）在每一個區間內都有根，卽它的三個根全是實數。把它們叫做 λ、μ、ν 且命

$$\lambda<\mu<\nu。$$

我們看出，對於每一點 $(x,\ y,\ z)$ 在我們的曲面族中有三個曲面通過(圖 25)：根 λ 對應橢面，根 μ 對應單葉雙曲面，最後根 ν 對應雙葉雙曲面。

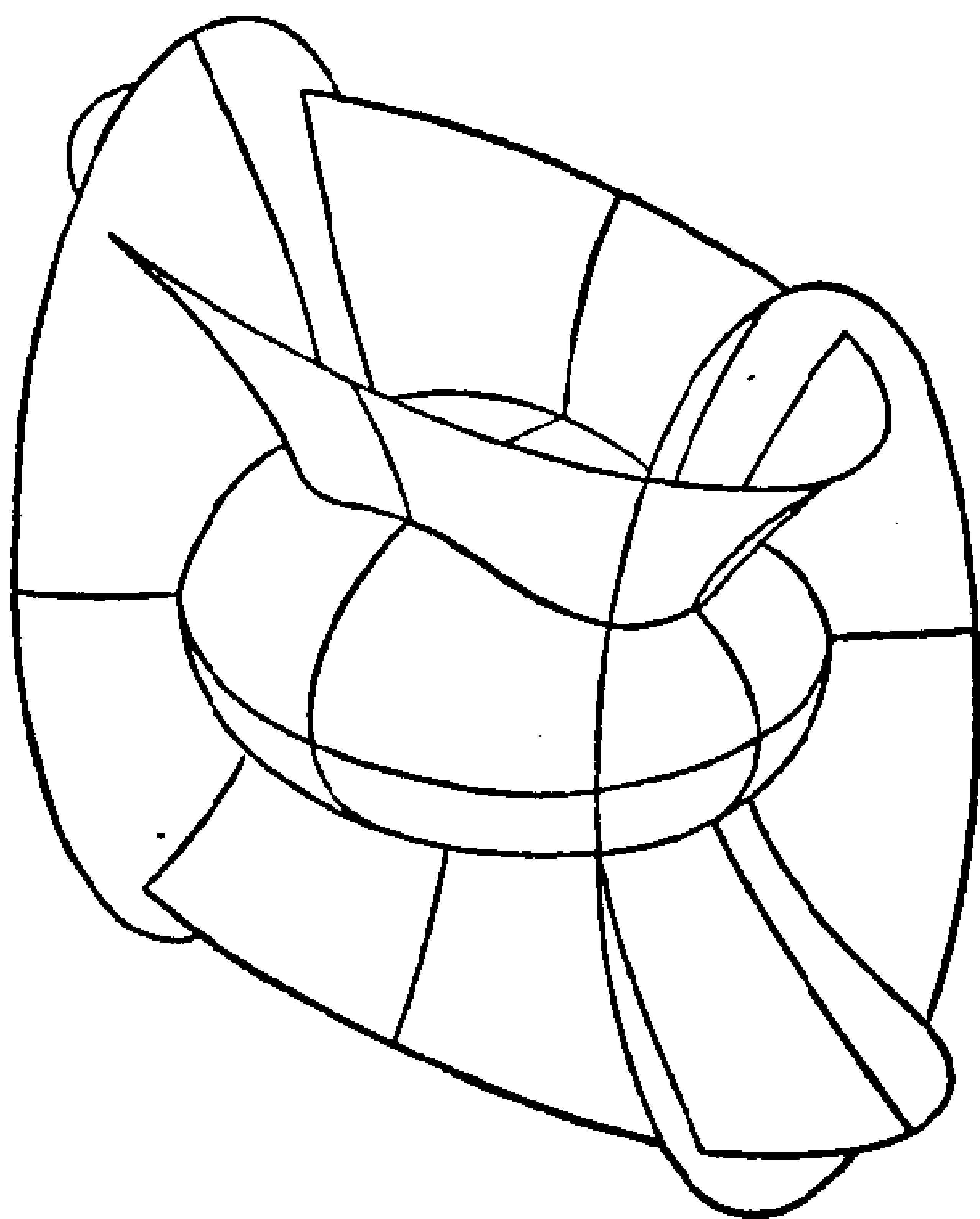


圖 25.

量 λ、μ、ν 可看成點的坐標。這些坐標叫做關於橢面（1）的橢面坐標。由此得知，狄卡爾坐標 x、y、z 及橢面坐標 λ、μ、ν 之間並不一一對應。事實上 λ、μ、ν 不是 x、y、z 的函數而是 x^2、y^2、z^2 的函數，故點$(\pm x,\ \pm y,\ \pm z)$與點$(x,\ y,\ z)$有同一的橢面坐標 λ、μ、ν。但假定我們考察的不是全部空間，而祇是一個卦限，則在其中橢面坐標可以完全確定一點。

圖 25 表出通過已知點的坐標曲面。

現今我們將導出當應用橢面坐標時，有用的關係式及公式。

根據量 λ、μ、ν 的定義，

$$1-\frac{x^2}{a^2-s}-\frac{y^2}{b^2-s}-\frac{z^2}{c^2-s}=-\frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)}。$$

由此，兩邊各乘以 a^2-s 再命 $s=a^2$，得

$$(3_1) \qquad x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}。$$

同樣可得出公式

$$(3_2) \qquad \begin{cases} y^2=\dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z^2=\dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}。 \end{cases}$$

命(x, y, z)爲空間的某一點，且命L、M、N爲通過它的橢面坐標面。在考察的點，這些曲面的法線的方向餘弦和下邊的量成比例：

$$(L) \qquad \frac{x}{a^2-\lambda}, \quad \frac{y}{b^2-\lambda}, \quad \frac{z}{c^2-\lambda},$$

$$(M) \qquad \frac{x}{a^2-\mu}, \quad \frac{y}{b^2-\mu}, \quad \frac{z}{c^2-\mu},$$

$$(N) \qquad \frac{x}{a^2-\nu}, \quad \frac{y}{b^2-\nu}, \quad \frac{z}{c^2-\nu}。$$

今提出，

$$\frac{x^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}=$$

$$=\frac{1}{\lambda-\mu}\left\{\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-\frac{x^2}{a^2-\mu}-\frac{y^2}{b^2-\mu}-\frac{z^2}{c^2-\mu}\right\}=0。$$

故曲面L及M正交，對於L及N、M及N也有同樣的關係。

這樣，橢面坐標是空間正交曲線坐標的一例。

今擬求在橢面坐標內弧的微分式。把(3_1)、(3_2)取對數後再微分，得

$$(4) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{dx}{x}=\dfrac{d\lambda}{\lambda-a^2}+\dfrac{d\mu}{\mu-a^2}+\dfrac{d\nu}{\nu-a^2}, \\ 2\dfrac{dy}{y}=\dfrac{d\lambda}{\lambda-b^2}+\dfrac{d\mu}{\mu-b^2}+\dfrac{d\nu}{\nu-b^2}, \\ 2\dfrac{dz}{z}=\dfrac{d\lambda}{\lambda-c^2}+\dfrac{d\mu}{\mu-c^2}+\dfrac{d\nu}{\nu-c^2}。 \end{cases}$$

用這些公式能夠通過橢面坐標的微分表達

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2。$$

最後這一公式將有以下的形狀

$$ds^2=L^2\,d\lambda^2+M^2\,d\mu^2+N^2\,d\nu^2,$$

因根據曲面坐標的正交性，不同微分的乘積的項相消。

至於談到係數 L、M、N 也不難求出。例如，對於 L^2，由(4)我們得出以下的表達式

$$4L^2=\frac{x^2}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)^2}。$$

由此再藉助於(3_1)、(3_2)求出

$$4L^2=\frac{(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-\lambda)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-\lambda)(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+$$

$$+\frac{(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-\lambda)(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

而最後一式可簡化成以下的形狀

$$(5_1)\qquad 4L^2=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}。$$

同樣求出

$$(5_2)\qquad \begin{aligned}4M^2&=\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)},\\ 4N^2&=\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}。\end{aligned}$$

橢面坐標與狄卡爾坐標中間對應的非唯一性能夠消去。爲此，橢面坐標 λ、μ、ν 需要用一定的方式通過橢圓函數表達出來。

命

$$(6)\qquad -s=\wp(U)+A$$

且由條件

$$(7)\qquad 4(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)=4\wp^3(U)-g_2\wp(U)-g_3,$$

確定函數 $\wp$ 的不變式 g_2、g_3。在(6)內順次用 a^2、b^2、c^2 代替 s 且

同時對應地以e_3、e_2、e_1代$\wp(U)$，得

$$-a^2=e_3+A,$$
$$-b^2=e_2+A,$$
$$-c^2=e_1+A,$$

由此得
$$A=-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)。$$

故

$$e_3=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-a^2=\frac{b^2+c^2-2a^2}{3},$$
$$e_2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-b^2=\frac{c^2+a^2-2b^2}{3},$$
$$e_1=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-c^2=\frac{a^2+b^2-2c^2}{3}。$$

這裏我們有實數的情形。因全體的根e_1、e_2、e_3都是實數。故ω是正數，而ω'是虛數。引出參數u、v、w代替橢面坐標λ、μ、ν，在(6)內順次以λ、μ、ν代s，而同時對應地以u、v、w代U。則將有

$$\lambda=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\wp(u),$$
$$\mu=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\wp(v),$$
$$\nu=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\wp(w)。$$

現將這些式代入x^2、y^2、z^2的公式(3_1)、(3_2)內，則有

$$x^2=\frac{[\wp(u)-e_3][\wp(v)-e_3][\wp(w)-e_3]}{(e_2-e_3)(e_1-e_3)},$$
$$y^2=\frac{[\wp(u)-e_2][\wp(v)-e_2][\wp(w)-e_2]}{(e_1-e_2)(e_3-e_2)},$$
$$z^2=\frac{[\wp(u)-e_1][\wp(v)-e_1][\wp(w)-e_1]}{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}。$$

如我們所知道的，右邊是某一些有理型函數的平方。故開平

方，得出 x、y、z 是參數 u、v、w 的單值函數。

回想起 §15 的公式，可以寫出

$$x=e^{-\eta_3\omega_3}\sigma^2(\omega_3)\frac{\sigma_3(u)\sigma_3(v)\sigma_3(w)}{\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)},$$

$$y=e^{-\eta_2\omega_2}\sigma^2(\omega_2)\frac{\sigma_2(u)\sigma_2(v)\sigma_2(w)}{\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)},$$

$$z=e^{-\eta_1\omega_1}\sigma^2(\omega_1)\frac{\sigma_1(u)\sigma_1(v)\sigma_1(w)}{\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)}。$$

在這些公式中用 $u+2\omega_1$ 代替 u，但量 v、w 不動。因

$$\frac{\sigma_3(u+2\omega_1)}{\sigma(u+2\omega_1)}=-\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)},$$

$$\frac{\sigma_2(u+2\omega_1)}{\sigma(u+2\omega_1)}=-\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)},$$

$$\frac{\sigma_1(u+2\omega_1)}{\sigma(u+2\omega_1)}=+\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)},$$

故對於這一變換，z 不改變，但 x、y 均變號。對於參數 u 增加另外的週期，則量 x、y、z 受到同樣的變化，如下表所示：

u	$u+2\omega_1$	$u+2\omega_2$	$u+2\omega_3$
x	$-x$	$-x$	x
y	$-y$	y	$-y$
z	z	$-z$	$-z$

在另一方面，改變 u 的號，則三個坐標 x、y、z 全變號。

由此，我們可以挑選 u、v、w 的變域，使這些參數與坐標 x、y、z 之間的對應是一對一的。

55. 用橢面坐標表達的拉普拉斯方程 假定在拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

內引用任意的正交曲線坐標 λ、μ、ν 以替代狄卡爾坐標 x、y、z，則改造後的方程將具有以下的形狀

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{MN}{L}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{NL}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{LM}{N}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)=0,$$

其中 L、M、N 是這些坐標的弧的微分式

$$ds^2=L^2\,d\lambda^2+M^2\,d\mu^2+N^2\,d\nu^2$$

內的函數。這個事實是屬於拉梅(Lame)的(1834)，平常在向量解析教程中有證明，我們可以認爲它是旣知的。

將橢面坐標取爲 λ、μ、ν，並利用前節求出的 L、M、N 的式子，我們得出以下的方程：

$$(\mu-\nu)\varDelta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\varDelta(\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right\}+(\nu-\lambda)\varDelta(\mu)\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\varDelta(\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}+$$
$$+(\lambda-\mu)\varDelta(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\varDelta(\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\}=0,$$

其中

$$\varDelta(\rho)=\sqrt{(a^2-\rho)(b^2-\rho)(c^2-\rho)}\text{。}$$

今導出量 u、v、w 以替代坐標 λ、μ、ν。變換的公式在前節已經得出。根據這些公式，我們的方程變爲

$$(1)\qquad \{\wp(v)-\wp(w)\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\{\wp(w)-\wp(u)\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+$$
$$+\{\wp(u)-\wp(v)\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}=0\text{。}$$

我們將尋求這個方程具有以下形狀的特解：

$$(2)\qquad \varphi=U(u)V(v)W(w)\text{。}$$

把這一式代入(1)內，得

$$U''VW\{\wp(v)-\wp(w)\}+V''WU\{\wp(w)-\wp(u)\}+$$
$$+W''UV\{\wp(u)-\wp(v)\}=0,$$

由此得

$$(3')\qquad \frac{U''}{U}=\frac{V''}{V}\,\frac{\wp(w)-\wp(u)}{\wp(w)-\wp(v)}+\frac{W''}{W}\,\frac{\wp(u)-\wp(v)}{\wp(w)-\wp(v)}\text{。}$$

右邊是 $\wp(u)$ 的一次整函數。故下式必須成立：

$$(3'') \qquad \frac{U''}{U}=A+B\wp(u),$$

其中A及B是常數。此外，比較等式(3')及(3'')的右邊，有

$$A=\frac{V''}{V}\frac{\wp(w)}{\wp(w)-\wp(v)}-\frac{W''}{W}\frac{\wp(v)}{\wp(w)-\wp(v)},$$

$$B=\frac{W''}{W}\frac{1}{\wp(w)-\wp(v)}-\frac{V''}{V}\frac{1}{\wp(w)-\wp(v)}。$$

用$\wp(v)$乘這些方程的第二個，再與第一方程相加，得

$$A+B\wp(v)=\frac{V''}{V},$$

同樣求出

$$A+B\wp(w)=\frac{W''}{W}。$$

這樣我們得到以下的結果：若函數U、V、W當x分別等於u、v、w時滿足方程

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=[A+B\wp(x)]y$$

則函數(2)將為方程(1)的特解，其中A、B是某兩個常數。

我們所得到的方程是拉梅首先研究的。他指出，$B=n(n+1)$，其中n是正整數，且適當選擇A後，寫成的方程可積分為橢圓函數。對於每一個自然數n，他求出拉普拉斯方程的特解，且藉助於這些特解作出通解。

方程(4)的以後的研究是屬於埃爾米特(Hermite)的。埃爾米特的某些結果將於下節內導出。

56. 拉梅方程 這一方程是用相同週期的橢圓函數作係數的齊次線形微分方程的特殊情形。關於這樣的方程，畢伽(Picard)有一普遍的定理。這一定理斷言，若這樣方程的通解是有理型函數，則這一方程藉助於具有相同週期的第二種雙週期函數可以積分。同時，依照埃爾米特所述，若函數(有理型的)$f(u)$滿足於

$$f(u+2\omega)=\mu f(u),$$

$$f(u+2\omega')=\mu' f(u),$$

則叫做用 2ω、$2\omega'$ 作週期的第二種雙週期函數，其中 μ、μ' 是常數（叫做函數的因子）。

因爲我們很想知道拉梅方程，故將證明在二級方程的情形的畢伽定理。讀者容易處理一般情形的證明。

這樣，命已知的方程爲

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0, \tag{1}$$

其中 $f(x)$、$g(x)$ 是用 2ω、$2\omega'$ 作週期的橢圓函數。命這一方程的通解爲 x 的有理型函數。

取某一特解

$$y=\varphi(x)。$$

函數

$$\varphi(x+2\omega),\quad \varphi(x+4\omega)$$

也是我們方程的特解。但因方程共有兩個一次獨立的特解，故

$$\varphi(x+4\omega)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(x+2\omega), \tag{2}$$

其中 α 及 β 是某二個確定的常數。

今考察函數

$$\psi(x)=\lambda_1\varphi(x)+\lambda_2\varphi(x+2\omega),$$

它是方程(1)的特解，λ_1、λ_2 是任意的常數。由(2)，

$$\psi(x+2\omega)=\lambda_1\varphi(x+2\omega)+\lambda_2[\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(x+2\omega)]=$$
$$=\alpha\lambda_2\varphi(x)+(\lambda_1+\beta\lambda_2)\varphi(x+2\omega)。$$

爲的要求

$$\psi(x+2\omega)=\mu\psi(x),$$

其中 μ 是常數。這一要求化爲以下的關係：

$$\begin{cases}\alpha\lambda_2=\mu\lambda_1,\\ \beta\lambda_2+\lambda_1=\mu\lambda_2。\end{cases} \tag{3}$$

由此得出確定 μ 的方程：

$$\mu^2-\mu\beta-\alpha=0。$$

當 μ 求出後，由方程組(3)可求出比 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$：

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\mu-\beta。$$

這樣，使

$$\psi(x+2\omega)=\mu\psi(x)。 \tag{4}$$

根據這個特解和從前處理 $\varphi(x)$ 那樣來處理，它的特解 $\psi(x)$ 就求出來了。但取 $2\omega'$ 代替 2ω，則得配合：

$$F(x)=\lambda_1'\psi(x)+\lambda_2'\psi(x+2\omega'),$$

使

$$F(x+2\omega')=\mu' F(x),$$

其中 μ' 又是某一常數。因爲根據(4)有

$$F(x+2\omega)=\mu F(x),$$

故 $F(x)$ 是第二種雙週期函數。但這是我們方程的特解。

現在藉助於這一個解來降低方程式的級。爲此,命

$$y=F(x)\int z\,dx。$$

我們的方程變爲

$$F(x)z'+2F'(x)z+f(x)F(x)z=0$$

或

$$z'+\left[2\frac{F'(x)}{F(x)}+f(x)\right]z=0。$$

這個方程的係數是用前邊的週期作爲週期的橢圓函數。

設我們考察 n 級而不是二級的方程,則我們就得到 $n-1$ 級的方程。而且對於它,應當重複應用施行於原來方程的討論。我們已得到,新的方程至少具有一個特解是第二種雙週期函數。

現今的情形,z 可直接求出:

$$z=\frac{1}{[F(x)]^2}e^{-\int f(x)dx}$$

且容易看出,這是一個第二種雙週期函數。

這樣,對於考察的特殊情形,畢伽定理就證明了。

今轉到拉梅方程

$$\frac{d^2y}{du^2}=[n(n+1)\wp(u)+l]y。\tag{5}$$

我們假定 n 是自然數,而對於常數 l 沒有任何限制。

這一方程的通解是有理型函數。

爲了證明,應注意,這個解的奇異點在有限距離內祇有函數 $\wp(u)$ 的極點。

例如,取極點 $u=0$, 依據微分方程理論的一般方法,求我們方程的 u 的冪級數形式的特解。我們作出級數,使它形式地滿足我們的方程。這些級數將祇包含 u 的整數次冪,且它的負數冪的項有有限個。

但因這些級數在點 $u=0$ 的某一鄰近收斂(點 $u=0$ 本身可能除外),故點 $u=0$ 或爲正則點或爲極點。應用同樣的方法到函數 $\wp(u)$ 的其他極點,則可證明我們方程的通解的有理型性。

這樣,我們現在來求形式上滿足拉梅方程的級數,爲方便起見,命

$$n(n+1)\wp(u)+l=\frac{n(n+1)}{u^2}+\sum_{r=1}^{\infty}A_{2r}u^{2r-2}$$

且命
$$y=u^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}C_k u^k \quad (C_0\neq 0)。$$
將這一級數代入方程內，得
$$\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)u^{k+\alpha-2}=$$
$$=\left[n(n+1)+\sum_{r=1}^{\infty}A_{2r}u^{2r}\right]\sum_{k=0}^{\infty}C_k u^{k+\alpha-2}.$$
比較兩邊的係數，得
$$C_0\omega(\alpha)=0,$$
$$C_1\omega(\alpha+1)=0,$$
$$C_2\omega(\alpha+2)+C_0A_2=0,$$
$$C_3\omega(\alpha+3)+C_1A_2=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{2m}\omega(\alpha+2m)+C_{2m-2}A_2+C_{2m-4}A_4+\cdots+C_0A_{2m}=0,$$
$$C_{2m-1}\omega(\alpha+2m-1)+C_{2m-3}A_2+C_{2m-5}A_4+\cdots+C_1A_{2m-2}=0,$$
其中
$$\omega(x)=x(x-1)-n(n-1)。$$
因 $C_0\neq 0$，故 α 必須是方程
$$\omega(\alpha)=0$$
的根，故
$$\alpha=n+1$$
或
$$\alpha=-n。$$

對於這些假設中的每一個，我們都可取
$$C_1=C_3=C_5=\cdots=0。$$
對於係數 C_{2k} 的確定，我們有下面的方程
$$C_{2m}\omega(\alpha+2m)+C_{2m-2}A_2+\cdots+C_0A_{2m}=0,$$
若 $\omega(\alpha+2k)$ 永不等於零，從這裏邊可以求出全體的 C_{2k}。但方程
$$\omega(x)=0$$
像我們已經指出的，有根
$$x=n+1, \quad x=-n,$$
且這二根之差是奇數。因 $\omega(\alpha)=0$，故 $\omega(\alpha+2k)$ 對於任何的自然數 k 都不能是零。我們看出，這一級數祇含變數的整數次冪，且負數冪的項有有限個。因此定理就證明了。

我們現在來應用畢伽定理。

命 $\varphi(u)$ 是方程(5)的特解，它是因子爲 μ、μ' 的第二種雙週期函數。導出函數

$$\varphi(u)e^{-\lambda u}\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-a)}=\psi(u),$$

其中 λ 及 a 是未確定的常數。u 加週期 2ω、$2\omega'$，得

$$\psi(u+2\omega)=\mu\varphi(u)e^{-\lambda(u+2\omega)}e^{2\eta a}\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-a)}=\mu e^{2\eta a}e^{-2\lambda\omega}\psi(u)$$

及
$$\psi(u+2\omega')=\mu' e^{2\eta' a}e^{-2\lambda\omega'}\psi(u)。$$

今使 $\psi(u)$ 具有週期 2ω、$2\omega'$ 以確定 a 及 λ。爲此，需要

$$e^{-2(a\eta-\lambda\omega)}=\mu,$$

$$e^{-2(a\eta'-\lambda\omega')}=\mu'$$

或
$$\omega\lambda-\eta a=\frac{1}{2}\ln\mu,$$

$$\omega'\lambda-\eta' a=\frac{1}{2}\ln\mu'。$$

這一組方程的行列式

$$\eta'\omega-\eta\omega'$$

不是零。也就是說需要的量 a 及 λ 存在。

既然 $\psi(u)$ 是橢圓函數，所以它可以通過 σ 函數依照其零點及極點表達出來。

我們假定函數 $\varphi(u)$ 在點 $u=0$ 處具有 n 級極點。故 $\psi(u)$ 在該點具有 $n-1$ 級的極點。此外，$\psi(u)$ 在點 $u=a$ 處具有一級的極點。命

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

是函數 $\varphi(u)$ 零點的完全系，且命

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a;$$

這時有
$$\psi(u)=C\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-a)[\sigma(u)]^{n-1}}。$$

故
$$\varphi(u)=Ce^{\lambda u}\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)}{[\sigma(u)]^n}。$$

得到的公式包含常數 $\lambda,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$，它們應當這樣確定，

使考察的函數滿足方程(5)。

當 $n=1$ 時這些常數的確定特別簡單。現今想詳細的討論這一情形。

方程具有以下形狀

$$y''=[2\wp(u)+l]y。$$

在這裏我們有特解

$$y_1=e^{-\lambda u}\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u)}。$$

想要把這一函數代入拉梅方程內,先求 y_1 的對數的導數:

$$\frac{y_1'}{y_1}=-\lambda+\zeta(u+a)-\zeta(u);$$

其次再求出

$$\frac{y_1''}{y_1}=\wp(u)-\wp(u+a)+[-\lambda+\zeta(u+a)-\zeta(u)]^2。$$

故下邊的恆等式必須成立。

$$2\wp(u)+l=\wp(u)-\wp(u+a)+[-\lambda+\zeta(u+a)-\zeta(u)]^2。$$

它可以寫成以下形狀

$$\wp(u)+\wp(u+a)+l=[-\lambda+\zeta(u+a)-\zeta(u)]^2,$$

或

$$l-\wp(a)+\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}\right]^2=$$
$$=\left[\zeta(a)-\lambda+\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}\right]^2。$$

容易看出,這一恆等式當且祇當

$$\wp(a)=l,$$
$$\zeta(a)=\lambda$$

時才成立。這樣,當 $n=1$ 時拉梅方程具有特解

$$y_1=e^{-u\zeta(a)}\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u)}\quad[\wp(a)=l]。$$

用 $-a$ 代 a，得出另一特解：

$$y_2=e^{u\zeta(a)}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}。$$

若 a 不是半週期，卽假定 $l\neq e_k$ $(k=1,2,3)$，則它們是一次獨立的。

57. 畢伽關於整函數的定理 這個定理說：對於任何異於常數的整函數 $f(z)$，不能多於一個有限值 a，使方程

$$f(z)-a=0$$

沒有根。

我們現在來證這個定理，它的證法是畢伽本人給與的。

假定整函數 $f(z)$ 不能取兩個有限的互異的值 a、b。則

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{b-a}$$

也是一個整函數，且不能取值 0 及 1。

回想起在 § 22 內研究過的模函數 $\lambda=\lambda(\tau)$。這一函數將領域 D_2（參閱圖 9）寫像爲有切斷的平面，這切斷沿半軸 $(1,\infty)$ 及 $(-\infty,0)$。

反函數 $\tau=\tau(\lambda)$ 在沒有切斷的 λ 平面上是無限多值函數，且它的分歧點是 $\lambda=0$、1、∞。圍繞這些點的每一個旋轉一週，量 τ 便受到羣 Σ_2 內某一變換的改變。

今把函數

$$(1)\qquad \tau[g(z)]=G(z)$$

看作 z 的函數。假設在某一點 z_0 我們挑選量 $\tau[g(z_0)]$ 的可能值之一，且假定在另外的點 z 上我們確定函數 $\tau[g(z)]$ 使它保持連續性。用這種方法得到的解析函數 $G(z)$ 是單值的麼？這一問題的答案是肯定的。

事實上，命點 z 在 z 平面上描繪閉曲線 C。這時 $\lambda=g(z)$ 在它自己的平面上描繪閉曲線 Γ。這一閉曲線 Γ 的內部不包含點

$\lambda=0$ 及點 $\lambda=1$。事實上,在相反的情形中,改變曲線 C,我們能夠達到,使相關的曲線 Γ 經過點 $\lambda=0$、$\lambda=1$ 中的一個,但由假設,這是不可能的。這樣,當點 z 描繪閉曲線時 點 $\lambda=g(z)$ 不能繞函數 $\tau(\lambda)$ 的任一分歧點描繪閉曲線。故 z 這樣地變化時,函數(1)不發生變化,因而它的單值性得以證明。

因爲 $\Im\tau>0$,故函數(1)在 z 的全平面上滿足不等式

$$\Im G(z)>0。$$

故函數

$$e^{iG(z)} \tag{2}$$

在變數 z 的全平面上滿足於不等式

$$|e^{iG(z)}|<1。$$

由留衞路定理,知函數(2)必須爲常數,但如果原來的函數 $f(z)$ 不是常數的話,這是不可能的。

畢伽在 1879 年證明了他的定理。

以後包萊里(Borel)注意到了定理的非常一般的性質與它的證明的極爲特殊的方法之間的顯明的抵觸。

在許多年內所說的畢伽定理的研究,以及第二個更一般的畢伽定理與跟其有關的許多應用,曾經是數學家們注意的中心。現在,求出上述命題的非常簡單證法,不依賴特殊函數的特殊性質而只根據函數論的一般原理。

但是應該提出,在某些與畢伽定理有關聯的命題中,建立了些估計式。同時,爲了要得到估計式,導出模函數是不可避免的。

在下節內我們將導出有關這方面的一個極重要的定理。

58. 蘭道定理　這個定理可表述如下:設冪級數

$$f(z)=a_0+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots\quad(a_n\neq0,\ n\geqslant1)$$

在中心是點 $z=0$、半徑是 R 的圓內收斂,且不等於數值 0 及 1,則這一圓的半徑 R 不超過某一量,這一量祇與 a_0、a_n、n 有關:

$$R \leqslant \varphi(a_0, a_n, n)。$$

可見，在考察的定理中提到了函數 $\varphi(a_0, a_n, n)$ 所給的估計式。在蘭道定理證明的過程中，我們將求出這一函數正確的式子。

蘭道定理和前節所考察的畢伽定理的關係是很明顯的。

事實上，假定不等於數值 0 及 1 的整函數 $g(z)$ 不是常數的話，則在係數 $a_0, a_1, \cdots$ 中，由第二個起，能找到最初不是零的一個，命它是 a_n。按照蘭道定理可以指出這樣的圓，在這圓內 $g(z)$ 至少可等於數值 0 及 1 中的一個，這與假設違背。

這樣，畢伽定理是蘭道定理的推論。

現今來證明蘭道定理。

取函數
$$\Omega(z) = \frac{\tau[f(z)] - \tau(a_0)}{\tau[f(z)] - \overline{\tau(a_0)}},$$

這裏 $\tau(a_0)$ 是函數 $\tau[f(z)]$ 在點 $z=0$ 處能取的數值中的一個。函數 $\tau[f(z)]$ 在圓 $|z|<R$ 內另外點的值是這樣挑選的，使它們保持連續性。像在畢伽定理內相當的情況一樣地可證明，$\Omega(z)$ 在領域 $|z|<R$ 內是正則函數。其次，容易看出，當 $|z|<R$ 時有

$$|\Omega(z)|<1$$

及
$$\Omega(0)=0。$$

因為
$$f(z)=a_0+a_nz^n+\cdots,$$

故對於 $\Omega(z)$ 得出展開式

$$\Omega(z) = \frac{\tau'(a_0)}{2i\Im\tau(a_0)} a_n z^n + \cdots。$$

按照柯西不等式，有

$$\left|\frac{\tau'(a_0)}{2\Im\tau(a_0)} a_n\right| \leqslant \frac{1}{R^n}$$

也就是
$$R \leqslant \sqrt[n]{\frac{2\Im\tau(a_0)}{|a_n|\cdot|\tau'(a_0)|}};$$

所餘的證明是：我們所得出的那個估計值是正確的，即

$$\varphi(a_0, a_n, n)=\sqrt[n]{\frac{2\Im\tau(a_0)}{|a_n|\cdot|\tau'(a_0)|}}。$$

設我們希望對於某一函數 $f(z)$，有下邊的等式成立

$$R=\sqrt[n]{\frac{2\Im\tau(a_0)}{|a_n|\cdot|\tau'(a_0)|}},$$

則需要，想法使對應的函數

$$\Omega(z)=A_n z^n+\cdots$$

滿足於不等式

$$|\Omega(z)|<1 \quad (|z|<R),$$

且有下邊的等式成立

$$|A_n|=\frac{1}{R^n}。$$

但這是表明在圓內正則的函數

$$(\alpha) \qquad \frac{\Omega(z)}{z^n}$$

的模數應當在點 $z=0$ 處達到它的極大值。故考察的比（α）應當是常數：

$$\Omega(z)=\frac{\varepsilon z^n}{R^n} \quad (|\varepsilon|=1)。$$

由等式

$$\frac{\varepsilon z^n}{R^n}=\frac{\tau[f(z)]-\tau(a_0)}{\tau[f(z)]-\overline{\tau(a_0)}}$$

先求出

$$\tau[f(z)]=\frac{\tau(a_0)R^n-\overline{\tau(a_0)}\varepsilon z^n}{R^n-\varepsilon z^n},$$

然後得出

$$f(z)=\lambda\left(\frac{\tau(a_0)R^n-\overline{\tau(a_0)}\varepsilon z^n}{R^n-\varepsilon z^n}\right)。$$

故下邊等式

$$R=\sqrt[n]{\frac{2\Im\tau(a_0)}{|a_n|\cdot|\tau'(a_0)|}}$$

的可能性被證明了，即我們的估計值是正確的。

59. 具有代數加法定理的有理型函數 設有理型函數 $\varphi(z)$，它使下邊的恆等式成立

(1)　　$F[\varphi(z_1+z_2),\ \varphi(z_1),\ \varphi(z_2)]=0,$

則這一函數具有代數的加法定理，其中 F 是它的變數的某一個有理整函數。

前邊我們已經看到，全體的橢圓函數都具有代數的加法定理。變態的橢圓函數具有這樣的代數加法定理（這不難直接檢查）的，是有理型單週期函數和有理函數。

衛爾斯脫拉斯曾證明不再有其他的函數也具有代數加法定理。

假定我們能證明全體的異於有理函數的有理型函數，凡是具有代數加法定理的必須具有週期，則衛爾斯脫拉斯定理將被證明。事實上，此後祇剩下考察雅各比定理了，按照這個定理，具有週期的單值解析函數，或者是單週期的或者是雙週期函數。

命有理型函數 $\varphi(z)$ 具有代數加法定理(1)，其中 F 爲關於第一個變數的 m 次多項式。

依據奧斯古都(Osgood)，可利用畢伽定理，它的特殊情形我們在上邊已經證明（§ 57）。這裏我們需要畢伽定理的一般形式。他說：若 $f(z)$ 是單值函數，具有孤立的本性奇異點，則在它的任意的鄰近，$f(z)$ 可取任何值，最多可能有二值是例外。前邊考察過的情形，$f(z)$ 是超越整函數。

取某一數 C_1，使它異於 $\varphi(z)$ 在點 $z=\infty$ 的鄰近所取的那些值。在這種情形，可指出 $m+1$ 個不同的點

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m,$$

使

$$\varphi(\alpha_k)=C_1 \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ m)。$$

這樣，取出函數 $\varphi(z)$ 的正則點 ζ，使點

$$\alpha_0+\zeta,\ \alpha_1+\zeta,\ \cdots,\ \alpha_m+\zeta$$

也是 $\varphi(z)$ 的正則點。顯然這對於全體的充分接近於 ζ 的 z 都成立。取所指出的這些之中的一個作爲 z，考察方程

$$F[x, \varphi(z), C_1]=0。$$

這一方程具有 $m+1$ 個根

$$x=\varphi(z+\alpha_k) \quad (k=0, 1, \cdots, m)。$$

按照我們的條件，這些根不能互異。卽對於點 ζ 的某一鄰近的每一 z，有下邊的等式成立

$$\varphi(z+\alpha_r)=\varphi(z+\alpha_s)。$$

數對 (α_r, α_s) 可以由 z 的一個值變到另一個值。但因這些 z 的值有無窮多，而數對 (α_r, α_s) 的個數有限，故至少對於某一數對 $(\alpha_\rho, \alpha_\sigma)$，等式

$$\varphi(z+\alpha_\rho)=\varphi(z+\alpha_\sigma) \tag{2}$$

對於點 z 的無窮集合全滿足，但這些點 z 具有極限點 ζ，在該處，$\varphi(z)$ 是正則的。由此按照解析函數的性質得，等式(2)是恆等式。這就意味着 $\varphi(z)$ 具有週期

$$\alpha_\sigma-\alpha_\rho。$$

定理證明完了。

60. 解析函數的富利哀級數 在本節內我們將考察具有週期 2π 且在實軸上正則解析的函數。

某一個正則帶域屬於每一個這種函數 $f(z)$，卽在界於二直線

$$y=-\alpha, \quad y=\beta \quad (\alpha>0, \beta>0)$$

間的最大的帶域內函數為正則的。在這兩個直線的每一直線上被考察的函數 $f(z)$ 至少有一奇異點。

定理1. 命 $f(z)$ 為用 2π 作週期的解析函數，且在閉帶域

$$-a\leqslant y\leqslant b \quad (a>0, b>0)$$

內為正則的。其次，命

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

為函數 $f(x)$ 的富里哀級數。

在這種情形，不等式

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{r}|c_{-k}|\leqslant Me^{-kb}\\ |c_k|\leqslant Me^{-ka}\end{array}\right\}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

成立，其中 M 是某一常數(與 k 無關)。

證明　考查用

$$(0,0),\quad (2\pi,0),\quad (2\pi,b),\quad (0,b)$$

作頂點的矩形。函數 $f(z)e^{ikz}$ 在這一矩形內及境界上為正則的。故應用柯西定理到這一函數，得出等式

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}\,dx+i\int_0^b f(2\pi+iy)e^{-ky}\,dy+$$

$$+\int_{2\pi}^0 f(x+ib)e^{ikx-kb}\,dx+i\int_b^0 f(iy)e^{-ky}\,dy=0。$$

按照函數 $f(z)$ 的週期性，第二個積分與第四個積分相抵消。故

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}\,dx=e^{-kb}\int_0^{2\pi} f(x+ib)e^{ikx}\,dx。$$

因之有

$$c_{-k}=\frac{1}{2\pi}e^{-kb}\int_0^{2\pi} f(x+ib)e^{ikx}\,dx。$$

由此得出不等式

$$|c_{-k}|\leqslant Me^{-kb}\quad (k=0,1,2,\cdots),$$

其中 M 是函數 $f(z)$ 在被考察的帶域內的模數的最大值。

同樣可證明關於 c_k 的不等式。

定理 2.　設下邊的不等式成立：

$$\left.\begin{array}{r}|c_{-k}|\leqslant Me^{-kb}\\ |c_k|\leqslant Me^{-ka}\end{array}\right\}\quad (a>0,\ b>0),$$

則級數

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}$$

在帶域

$$(2)\qquad -a<y<b$$

所包含的任意帶域內為均一且絕對收斂，並在帶域（2）內是週期

爲 2π 的正則解析的函數。

這一定理的證明是很簡單,我們可略去。

推論 確定函數 $f(z)$ 正則帶域的量 α、β。等於

$$\alpha = \varlimsup_{k\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}, \tag{3_1}$$

$$\beta = \varlimsup_{k\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt[k]{|c_{-k}|}}。 \tag{3_2}$$

證明 命公式 (3_1)、(3_2) 確定的數爲 α、β。這時對於任意的 $\varepsilon>0$, 則有充分大的數 k 使下邊的不等式成立:

$$|c_{-k}| < e^{-k(\beta-\varepsilon)},$$
$$|c_k| < e^{-k(\alpha-\varepsilon)}。$$

由此根據定理 2, 知 $f(z)$ 在帶域

$$-(\alpha-\varepsilon)<y<\beta-\varepsilon$$

內爲正則的,但因 ε 爲任意數,故 $f(z)$ 在帶域

$$-\alpha<y<\beta$$

內爲正則的。

剩下需要證明的是,這是使 $f(z)$ 爲正則的最大帶域。否則,由定理 1 我們就要得出:在不等式

$$|c_{-k}| \leqslant Me^{-kb} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

內能取 $b>\beta$, 或於不等式

$$|c_k| \leqslant Me^{-ka} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

內而能取 $a>\alpha$。

在第一種情形中,我們得出

$$\varlimsup_{k\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt[k]{|c_{-k}|}} > \beta,$$

而在第二種情形中,則有

$$\varlimsup_{k\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}} > \alpha。$$

但這兩個全與題設違背。

現今提出，假定 $f(z)$ 是整函數，則參數 α、β 都是無限大，而不等式（1）對於任意的 $a>0$、$b>0$ 都成立。但應記住，M 是 a、b 的函數，且當 $a\to\infty$、$b\to\infty$ 時無限的增大，這裏自然假定 $f(z)$ 不是常數。

用實數作週期（這樣的週期可常化為 2π）的整函數，最好的例是西他函數，我們在本書的開始就介紹出來了（§ 3）。

今再考察用實數作週期的某些有理型函數。

取函數
$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}=\operatorname{sn}\left(\frac{2Kv}{\pi};\,k\right),$$
其中 K 是用 k 作模數的第一種完全橢圓積分。這一函數具有週期 2π、$\dfrac{\pi i K'}{K}$ 且可以有展開式
$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nv。$$
用 $\pi-v$ 代替 v，得
$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n\sin nv,$$
故
$$c_{2n}=0\quad(n=1,2,\cdots)\quad 且$$
$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n-1}\sin(2n-1)v。$$

我們有下邊確定富里哀係數 c_{2n-1} 的公式
$$c_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}\sin(2n-1)v\,dv=$$
$$=\frac{2}{\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}e^{(2n-1)iv}\,dv。$$
取它的頂點是
$$-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi i K'}{K},\ -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi i K'}{K}$$
的平行四邊形。沿這一平行四邊形的境界，積分函數

(4) $$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}e^{(2n-1)iv},$$

並注意到函數(4)具有週期π，由此知沿兩側邊的積分相抵消，故得

$$\frac{2}{\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}e^{(2n-1)iv}\,dv+\frac{2}{\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi iK'}{K}}^{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi iK'}{K}}\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}e^{(2n-1)iv}\,dv=$$

$$=4\operatorname*{R\acute{e}s}_{v=\frac{\pi iK'}{2K}}\left\{\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}e^{(2n-1)iv}\right\}。$$

不複雜的計算指明，

$$\operatorname*{R\acute{e}s}_{v=\frac{\pi iK'}{K}}\left\{\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}e^{(2n-1)iv}\right\}=\frac{\pi}{2kK}e^{-\frac{(2n-1)\pi K'}{2K}}。$$

引入 $$h=e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

得 $$c_{2n-1}(1-h^{2n-1})=\frac{2\pi}{kK}h^{n-\frac{1}{2}},$$

這樣就有 $$c_{2n-1}=\frac{2\pi}{kK}\frac{h^{n-\frac{1}{2}}}{1-h^{2n-1}}。$$

故我們的展開式具有下邊的形狀

$$\operatorname{sn}\frac{2Kv}{\pi}=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-\frac{1}{2}}}{1-h^{2n-1}}\sin(2n-1)v。$$

在這裏，收斂的帶域是

$$|\Im v|<\Im\frac{\pi iK'}{2K}。$$

在同樣的帶域內，下邊的展開式成立

$$\operatorname{cn}\frac{2Kv}{\pi}=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-\frac{1}{2}}\cos(2n-1)v}{1+h^{2n-1}},$$

$$\operatorname{dn}\frac{2Kv}{\pi}=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n}\cdot\cos 2nv}{1+h^{2n}}。$$

這三個函數在這一帶域的境界上全有極點。

附錄I. 重要公式表

I. 基礎的三角函數

$$\sin u = u\prod{}'\left(1-\frac{u}{m\pi}\right)e^{\frac{u}{m\pi}}$$

$$\operatorname{ctg} u = \frac{1}{u}+\sum{}'\left(\frac{1}{u-m\pi}+\frac{1}{m\pi}\right)=\frac{d}{du}\ln\sin u$$

$$\frac{1}{\sin^2 u}=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\frac{1}{(u-m\pi)^2}=-\frac{d}{du}\operatorname{ctg} u$$

II. 衛爾斯脫拉斯函數

$$\sigma(u)=u\prod{}'\left(1-\frac{u}{s}\right)e^{\frac{u}{s}+\frac{u^2}{2s^2}}$$

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum{}'\left(\frac{1}{u-s}+\frac{1}{s}+\frac{u}{s^2}\right)=\frac{d}{du}\ln\sigma(u)$$

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left\{\frac{1}{(u-s)^2}-\frac{1}{s^2}\right\}=-\zeta'(u)$$

$$g_2=60\sum{}'\frac{1}{s^4};\quad g_3=140\sum{}'\frac{1}{s^6}$$

$$(s=2m\omega+2m'\omega')$$

$$\sigma(-u)=-\sigma(u);\quad \zeta(-u)=-\zeta(u);\quad \wp(-u)=\wp(u)$$

$$\sigma(u)=u-\frac{g_2u^5}{2^4\cdot3\cdot5}-\frac{g_3u^7}{2^3\cdot3\cdot5\cdot7}-\cdots$$

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}-\frac{g_2u^3}{2^2\cdot3\cdot5}-\frac{g_3u^5}{2^2\cdot5\cdot7}-\cdots$$

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2u^2}{2^2\cdot5}+\frac{g_3u^4}{2^2\cdot7}+\cdots$$

III. 齊次性的關係式

$$\sigma(u)=\sigma(u|\omega,\quad\omega')=\sigma(u;\ g_2,\ g_3)$$
$$\zeta(u)=\zeta(u|\omega,\quad\omega')=\zeta(u;\ g_2,\ g_3)$$
$$\wp(u)=\wp(u|\omega,\quad\omega')=\wp(u;\ g_2,\ g_3)$$
$$g_2=g_2(\omega,\ \omega');\ g_3=g_3(\omega,\ \omega')$$

$$\sigma(\lambda u|\lambda\omega,\ \lambda\omega')=\lambda\sigma(u|\omega,\ \omega')$$
$$\zeta(\lambda u|\lambda\omega,\ \lambda\omega')=\frac{1}{\lambda}\zeta(u|\omega,\ \omega')$$
$$\wp(\lambda u|\lambda\omega,\ \lambda\omega')=\frac{1}{\lambda^2}\wp(u|\omega,\ \omega')$$
$$g_2(\lambda\omega,\ \lambda\omega')=\frac{1}{\lambda^4}g_2(\omega,\ \omega')$$
$$g_3(\lambda\omega,\ \lambda\omega')=\frac{1}{\lambda^6}g_3(\omega,\ \omega')$$

IV. 函數 $\wp$ 的微分方程

$$\wp'^2(u)=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3=$$
$$=4\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}\{\wp(u)-e_3\}$$

$$e_1+e_2+e_3=0$$
$$e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)=-\frac{1}{4}g_2$$
$$e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3$$
$$G=\frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2)=(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2$$

$$\omega_1=\omega,\ \omega_2=-\omega-\omega',\ \omega_3=\omega'$$
$$e_\alpha=\wp(\omega_\alpha)\quad(\alpha=1,2,3)$$

V. 週期的補充

$$\wp(u+2\omega)=\wp(u+2\omega')=\wp(u)$$

$\zeta(u+2\omega)=\zeta(u)+2\eta$ $\zeta(u+2\omega')=\zeta(u)+2\eta'$	$\eta=\zeta(\omega)=\eta_1$ $\eta'=\zeta(\omega')=\eta_3$

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi i}{2} & \left(\Im\dfrac{\omega'}{\omega}>0\right)\\ -\dfrac{\pi i}{2} & \left(\Im\dfrac{\omega'}{\omega}<0\right)\end{cases}$$

$$\eta_2=-\eta-\eta'$$

$$\sigma(u+2\omega_\alpha)=-e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma(u)\quad(\alpha=1,2,3)$$

$$\sigma_\alpha(u)=-e^{\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma(\omega_\alpha)}\quad(\alpha=1,2,3)$$

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha)=-e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha(u)\quad(\alpha=1,2,3)$$

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta)=e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha(u)\quad(\beta\neq\alpha;\ \alpha,\beta=1,2,3)$$

$$\zeta_\alpha(u)=\frac{d}{du}\ln\sigma_\alpha(u)\quad(\alpha=1,2,3)$$

$$\zeta_\alpha(u)=\zeta(u+\omega_\alpha)-\eta_\alpha\quad(\sigma=1,2,3)$$

VI. 衞爾斯脫拉斯函數的加法定理

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}$$

$$\zeta(u+v)=\zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}$$

$$\wp(u+v)=\wp(u)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}$$

$$\wp(u+v)+\wp(u)+\wp(v)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}^2$$

$$\wp(u+v)-\wp(u-v)=-\frac{\wp'(u)\wp'(v)}{[\wp(u)-\wp(v)]^2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(w) & \wp'(w) \end{vmatrix}=0 \qquad (u+v+w=0)$$

$$\wp(u+\omega_\alpha)-e_\alpha=\frac{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}{\wp(u)-e_\alpha} \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$$

$$\sqrt{\wp(u)-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)} \quad (\alpha=1,2,3)$$

$$\wp'(u)=-2\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{[\sigma(u)]^3}$$

VII. 衛爾斯脫拉斯函數的變態

$\omega'=\infty$, ω 有限

$$\sigma(u)=\frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2}\sin\frac{\pi u}{2\omega}$$

$$\zeta(u)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u+\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega}$$

$$\wp(u)=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}$$

$$g_2^3-27\,g_3^2=0$$

$$e_1=\frac{3g_3}{g_2},\quad e_2=e_3=-\frac{3g_3}{2g_2}$$

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2=\frac{9g_3}{2g_2},\quad 2\eta\omega=\frac{\pi^2}{6}$$

$\omega=\infty$, $\omega'=\infty$

$$\sigma(u)=u$$

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}$$

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}$$

$$g_2=g_3=0$$

$$e_1=e_2=e_3=0$$

VIII. 西他函數，簡化公式

$$h=e^{\pi i\tau},\quad h^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{\pi i\tau}{4}},\quad \Im\tau>0,\quad z=e^{\pi iv}$$

$$\vartheta_1(v)=2h^{\frac{1}{4}}\sin\pi v-2h^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v+2h^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi v-\cdots$$

$$\vartheta_2(v)=2h^{\frac{1}{4}}\cos\pi v+2h^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v+2h^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi v+\cdots$$

$$\vartheta_3(v)=1+2h\cos 2\pi v+2h^4\cos 4\pi v+2h^9\cos 6\pi v+\cdots$$

$$\vartheta_0(v)=1-2h\cos 2\pi v+2h^4\cos 4\pi v-2h^9\cos 6\pi v+\cdots$$

$\vartheta_1(v\pm1)=-\vartheta_1(v)$	$\vartheta_1\left(v\pm\frac{1}{2}\right)=\pm\vartheta_2(v)$
$\vartheta_2(v\pm1)=-\vartheta_2(v)$	$\vartheta_2\left(v\pm\frac{1}{2}\right)=\mp\vartheta_1(v)$
$\vartheta_3(v\pm1)=\vartheta_3(v)$	$\vartheta_3\left(v\pm\frac{1}{2}\right)=\vartheta_0(v)$
$\vartheta_0(v\pm1)=\vartheta_0(v)$	$\vartheta_0\left(v\pm\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(v)$

$\vartheta_1(v\pm\tau)=-h^{-1}z^{\mp2}\vartheta_1(v)$	$\vartheta_1\left(v\pm\frac{\tau}{2}\right)=\pm ih^{-\frac{1}{4}}z^{\mp1}\vartheta_0(v)$
$\vartheta_2(v\pm\tau)=h^{-1}z^{\mp2}\vartheta_2(v)$	$\vartheta_2\left(v\pm\frac{\tau}{2}\right)=h^{-\frac{1}{4}}z^{\mp1}\vartheta_3(v)$
$\vartheta_3(v\pm\tau)=h^{-1}z^{\mp2}\vartheta_3(v)$	$\vartheta_3\left(v\pm\frac{\tau}{2}\right)=h^{-\frac{1}{4}}z^{\mp1}\vartheta_2(v)$
$\vartheta_0(v\pm\tau)=-h^{-1}z^{\mp2}\vartheta_0(v)$	$\vartheta_0\left(v\pm\frac{\tau}{2}\right)=\pm ih^{-\frac{1}{4}}z^{\mp1}\vartheta_1(v)$

全體的西他函數滿足微分方程

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}=4\pi i\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\qquad\{\vartheta=\vartheta(v|\tau)\}$$

IX．西他函數的無窮乘積展開式

$$h=e^{\pi i\tau},\quad h^{\frac14}=e^{\frac14\pi i\tau},\quad \Im\tau>0$$

$$H_0=\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k})\qquad H_1=\prod_{k=1}^{\infty}(1+h^{2k})$$

$$H_2=\prod_{k=1}^{\infty}(1+h^{2k-1})\qquad H_3=\prod_{k=1}^{\infty}(1-h^{2k-1})$$

$$H_1H_2H_3=1$$

$$\vartheta_1(v)=2H_0h^{\frac14}\sin\pi v\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k}\cos2\pi v+h^{4k})$$

$$\vartheta_2(v)=2H_0h^{\frac14}\cos\pi v\prod_{k=1}^{\infty}(1+2h^{2k}\cos2\pi v+h^{4k})$$

$$\vartheta_3(v)=H_0\prod_{k=1}^{\infty}(1+2h^{2k-1}\cos2\pi v+h^{4k-2})$$

$$\vartheta_0(v)=H_0\prod_{k=1}^{\infty}(1-2h^{2k-1}\cos2\pi v+h^{4k-2})$$

西他函數的零點

$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_0(v)$
$m+n\tau$	$m-\frac12+n\tau$	$m-\frac12+\left(n-\frac12\right)\tau$	$m+\left(n-\frac12\right)\tau$

$(m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

西他函數在變數等於零處的值

$$\vartheta_1'=\vartheta_1'(0)=2\pi h^{\frac14}H_0^3\qquad \vartheta_2=\vartheta_2(0)=2h^{\frac14}H_0H_1^2$$

$$\vartheta_3=\vartheta_3(0)=H_0H_2^2\qquad \vartheta_0=\vartheta_0(0)=H_0H_3^2$$

$$\vartheta_1'=\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0\qquad \vartheta_3^4=\vartheta_0^4+\vartheta_2^4$$

X. 各種部份分式展開式

$\dfrac{\omega'}{\omega}=\tau$	$\mathfrak{J}\tau>0$	$h=e^{\pi i\tau}$	$v=\dfrac{u}{2\omega}$	$e^{\pi iv}=z$

$\sigma(u)=2\omega e^{2\eta\omega v^2}\dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'}$	$\sigma_1(u)=e^{2\eta\omega v^2}\dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2}$
$\sigma_2(u)=e^{2\eta\omega v^2}\dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3}$	$\sigma_3(u)=e^{2\eta\omega v^2}\dfrac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0}$

$$\zeta(u)=\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi i}{2\omega}\left\{\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2h^{2k}z^{-2}}{1-h^{2k}z^{-2}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2h^{2k}z^{2}}{1-h^{2k}z^{2}}\right\}$$

$$\wp(u)=-\frac{\eta}{\omega}-\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{(z-z^{-1})^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}z^{-2}}{(1-h^{2k}z^{-2})^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}z^{2}}{(1-h^{2k}z^{2})^2}\right\}$$

$$2\eta\omega=-\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}=\frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h^{1\times2}+5^3h^{2\times3}-\cdots}{1-3h^{1\times2}+5h^{2\times3}-\cdots}=$$

$$=\frac{\pi^2}{6}\left\{1-24\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}}{(1-h^{2k})^2}\right\}$$

$$e_1=-\frac{\eta}{\omega}+\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k}}{(1+h^{2k})^2}\right\}$$

$$e_2=-\frac{\eta}{\omega}+2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k-1}}{(1+h^{2k-1})^2}$$

$$e_3=-\frac{\eta}{\omega}-2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{2k-1}}{(1-h^{2k-1})^2}$$

$$\sqrt{e_2-e_1}=i\sqrt{e_1-e_2}=i\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_0^2$$

$$\sqrt{e_3-e_2}=i\sqrt{e_2-e_3}=-i\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2$$

$$\sqrt{e_1-e_3}=i\sqrt{e_3-e_1}=\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2$$

XI. 西他函數的另外表示法

$h=e^{\pi i\tau}$	$\Im\tau>0$

$$K=\frac{\pi}{2}\{1+2h+2h^4+\cdots\}^2=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0|\tau)$$

$$iK'=\tau K$$

$\lambda=e^{-\frac{\pi i}{4K}(2u+iK')}$	$\mu=e^{-\frac{\pi i}{K}(u+iK')}$

$$\vartheta_\alpha(w)=\vartheta_\alpha\left(\frac{w}{2K}\right)\qquad(\alpha=0,1,2,3)$$

$H(w)=\vartheta_1(w)$ $H_1(w)=\vartheta_2(w)$	$\Theta(w)=\vartheta_0(w)$ $\Theta_1(w)=\vartheta_3(w)$

零　點

$H(w)$	$H_1(w)$	$\Theta(w)$	$\Theta_1(w)$
$2mK+2niK'$	$(2m+1)K+$ $+2niK'$	$2mK+$ $+(2n+1)iK'$	$(2m+1)K+$ $+(2n+1)iK'$

$(m, n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

$H(u+K)=H_1(u)$ $\Theta(u+K)=\Theta_1(u)$ $H_1(u+K)=-H(u)$ $\Theta_1(u+K)=\Theta(u)$	$H(u+iK')=i\lambda\Theta(u)$ $\Theta(u+iK')=i\lambda H(u)$ $H_1(u+iK')=\lambda\Theta_1(u)$ $\Theta_1(u+iK')=\lambda H_1(u)$
$H(u+K+iK')=\lambda\Theta_1(u)$ $\Theta(u+K+iK')=\lambda H_1(u)$ $H_1(u+K+iK')=-i\lambda\Theta(u)$ $\Theta_1(u+K+iK')=i\lambda H(u)$	$H(u+2iK')=-\mu H(u)$ $\Theta(u+2iK')=-\mu\Theta(u)$ $H_1(u+2iK')=\mu H_1(u)$ $\Theta_1(u+2iK')=\mu\Theta_1(u)$

XII. 雅各比函數

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1+2h+2h^4+2h^9+\cdots$$

$$\sqrt{k}=\frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}=\frac{2h^{\frac14}+2h^{\frac94}+\cdots}{1+2h+2h^4+\cdots}\qquad (h^{\frac14}=e^{\frac{\pi i\tau}{4}})$$

$$\sqrt{k'}=\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}=\frac{1-2h+2h^4-\cdots}{1+2h+2h^4+\cdots}$$

$$\mathrm{sn}\,(u;\,k)=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}$$

$$\mathrm{cn}\,(u;\,k)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}$$

$$\mathrm{dn}\,(u;\,k)=\sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}$$

$\mathrm{sn}(u+2K)=-\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{sn}(u+2iK')=\mathrm{sn}\,u$
$\mathrm{cn}(u+2K)=-\mathrm{cn}\,u$	$\mathrm{cn}(u+2iK')=-\mathrm{cn}\,u$
$\mathrm{dn}(u+2K)=\mathrm{dn}\,u$	$\mathrm{dn}(u+2iK')=-\mathrm{dn}\,u$

週期

$\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{cn}\,u$	$\mathrm{dn}\,u$
$4K,\ 2iK'$	$4K,\ 2K+2iK'$	$2K,\ 4iK'$

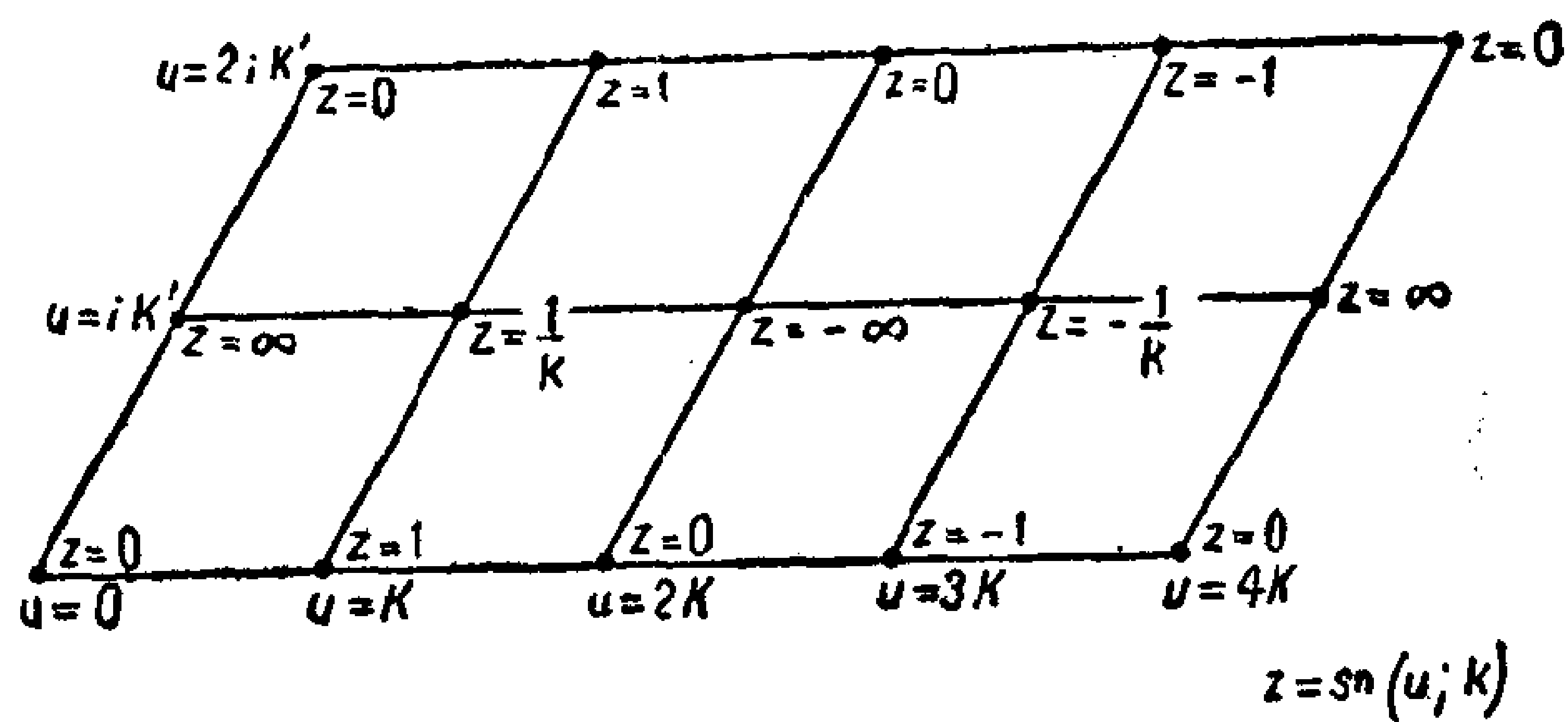
$\mathrm{sn}(u+K)=\dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$	$\mathrm{sn}(u+iK')=\dfrac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$
$\mathrm{cn}(u+K)=-k'\dfrac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$	$\mathrm{cn}(u+iK')=-i\dfrac{\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}$
$\mathrm{dn}(u+K)=\dfrac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$	$\mathrm{dn}(u+iK')=-i\dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$

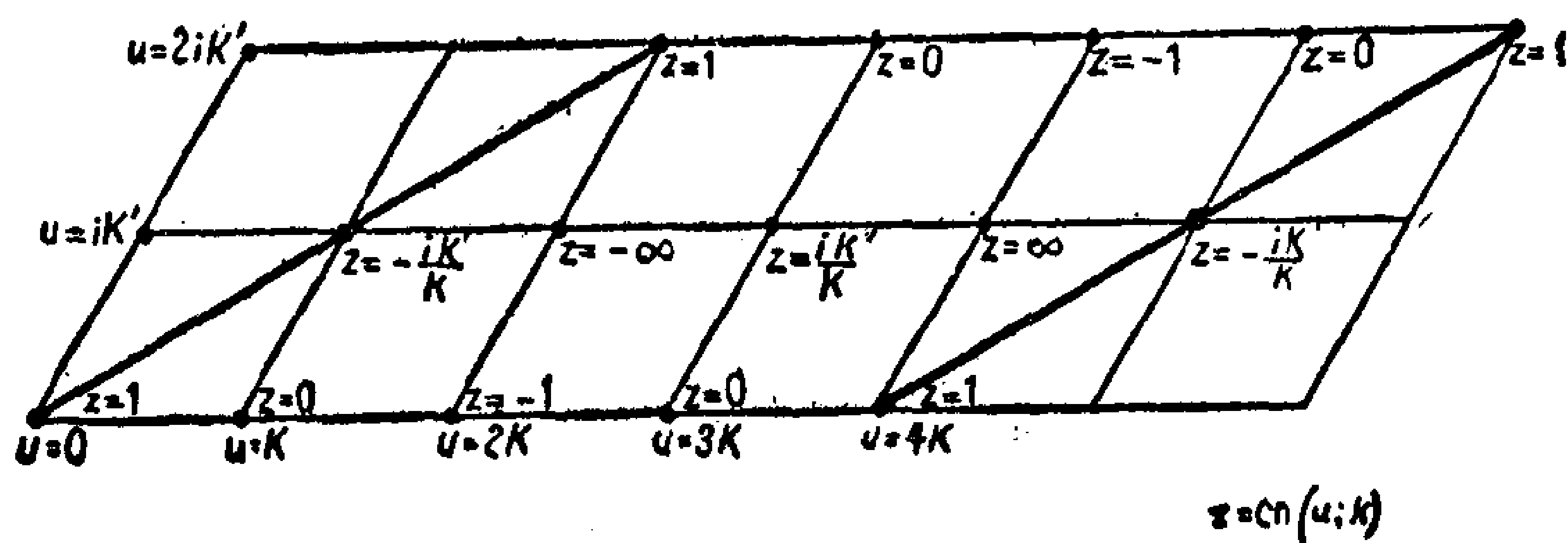
$$\mathrm{sn}(u+K+iK')=\frac{1}{k}\,\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

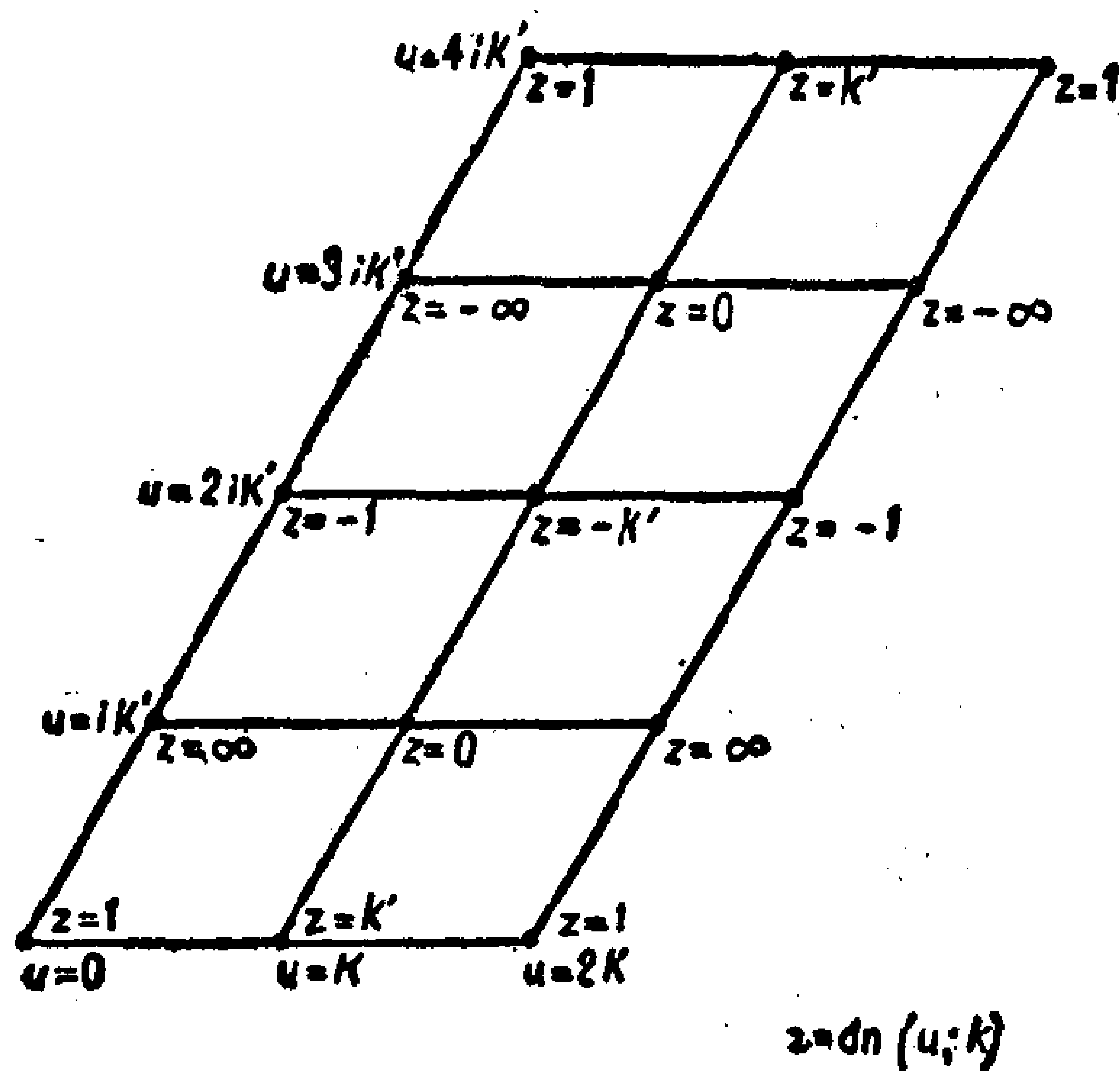
$$\mathrm{cn}(u+K+iK')=-\frac{ik'}{k\,\mathrm{cn}\,u}$$

$$\mathrm{dn}(u+K+iK')=ik'\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

XIII. 雅各比函數的某些值







XIV. 雅各比函數的微分法．加法定理

$$z=\operatorname{sn} u \qquad z'^2=(1-z^2)(1-k^2z^2)$$

$$z=\operatorname{cn} u \qquad z'^2=(1-z^2)(1-k^2+k^2z^2)$$

$$z=\operatorname{dn} u \qquad z'^2=(1-z^2)(z^2-1+k^2)$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u=\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{cn} u=-\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{dn} u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{dn} u=-k^2\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} u$$

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{dn} u\cdot\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn} u\cdot\operatorname{dn} v-k^2\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{sn} v\cdot\operatorname{cn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v)=\frac{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2 v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v)=\frac{\operatorname{cn}^2 v-\operatorname{dn}^2 v\cdot\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v)=\frac{\operatorname{dn}^2 v-k^2\operatorname{cn}^2 v\cdot\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 v}$$

XV. 雅各比函數的某些值(續)

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$$

$$\operatorname{cn}\frac{K}{2}=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$$

$$\operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sqrt{k'}$$

$$\operatorname{sn}\frac{iK'}{2}=\frac{i}{\sqrt{k}}$$

$$\operatorname{cn}\frac{iK'}{2}=\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$$

$$\operatorname{dn}\frac{iK'}{2}=\sqrt{1+k}$$

$$\operatorname{sn}\frac{K+iK'}{2}=\frac{1}{2\sqrt{k}}(\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k})$$

$$\operatorname{cn}\frac{K+iK'}{2}=\frac{\sqrt{k'}\,(1-i)}{\sqrt{2}\sqrt{k}}$$

$$\operatorname{dn}\frac{K+iK'}{2}=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k'}-i\sqrt{1-k'})$$

在標準情形中 $(0<k<1)$ 全體的根取算術值

XVI. 第一種及第二種橢圓積分

若點 e_1、e_2、e_3 在一直線上,則 e_2 表示這些點中間的那一個

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} \qquad k'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}$$

$$K={}'\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad K'={}'\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

$$E={}'\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt \qquad E'={}'\int_0^1\sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}}\,dt$$

積分號前邊的撇表示沿直線的路取積分,且取根使它的實數部分是正的那個值。

在標準情形中 $(0<k<1)$ 全體積分都是正的。

$$\eta_1=\sqrt{e_1-e_3}\left\{E-\frac{e_1}{e_1-e_3}K\right\} \qquad \eta_3=-i\sqrt{e_1-e_3}\left\{E'+\frac{e_3}{e_1-e_3}K'\right\}$$

$$EK'+E'K-KK'=\frac{1}{2}\pi$$

$$\omega_1=\frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}} \qquad \omega_3=\frac{iK'}{\sqrt{e_1-e_3}}$$

$$\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\operatorname{sn}(\sqrt{e_1-e_3}\,u;\,k)$$

$$\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}=\operatorname{cn}(\sqrt{e_1-e_3}\,u;\,k)$$

$$\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}=\operatorname{dn}(\sqrt{e_1-e_3}\,u;\,k)$$

$$E(u)=\int_0^u\operatorname{dn}^2v\cdot dv \qquad Z(u)=E(u)-\frac{E}{K}u=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

$$\int\frac{du}{\operatorname{sn}^2u}=uZ'(0)-\frac{H'(u)}{H(u)}$$

$$\int\frac{du}{\operatorname{cn}^2u}=\frac{u}{k'^2}Z'(K)-\frac{1}{k'^2}\frac{H_1'(u)}{H_1(u)}$$

$$\int\frac{du}{\operatorname{dn}^2u}=\frac{u}{k'^2}\frac{E}{K}+\frac{1}{k'^2}\frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}$$

XVII. 西他函數的(一級)變換

$$h=e^{\pi i\tau},\ \Im\tau>0,\ \tau'=-\frac{1}{\tau},\ \Re\sqrt{-i\tau'}>0,\ i^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$\vartheta_1(v|\tau)=i^{-\frac{1}{2}}\vartheta_1(v|\tau+1)$$
$$\vartheta_2(v|\tau)=i^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(v|\tau+1)$$
$$\vartheta_3(v|\tau)=\vartheta_0(v|\tau+1)$$
$$\vartheta_0(v|\tau)=\vartheta_3(v|\tau+1)$$

$$\vartheta_1(v|\tau)=-i\sqrt{-i\tau'}e^{\tau'\pi iv^2}\vartheta_1(\tau'v|\tau')$$
$$\vartheta_2(v|\tau)=\sqrt{-i\tau'}e^{\tau'\pi iv^2}\vartheta_0(\tau'v|\tau')$$
$$\vartheta_3(v|\tau)=\sqrt{-i\tau'}e^{\tau'\pi iv^2}\vartheta_3(\tau'v|\tau')$$
$$\vartheta_0(v|\tau)=\sqrt{-i\tau'}e^{\tau'\pi iv^2}\vartheta_2(\tau'v|\tau')$$

XVIII. 第一個主要的一級變換

$$\lambda=\frac{ik}{k'}\qquad M=\frac{1}{k'}$$
$$L=\frac{K}{M}\qquad iL'=\frac{iK'+K}{M}$$
$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\frac{\operatorname{sn}(u;\ k)}{\operatorname{dn}(u;\ k)}$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{\operatorname{cn}(u;\ k)}{\operatorname{dn}(u;\ k)}$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{\operatorname{dn}(u;\ k)}$$

XIX. 第二個主要的一級變換

$$\lambda=k'\qquad M=\frac{1}{i}$$
$$L=\frac{iK'}{M}\qquad iL'=-\frac{K}{M}$$
$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\frac{\operatorname{sn}(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)}$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{\operatorname{cn}(u;\ k)}$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{\operatorname{dn}(u;\ k)}{\operatorname{cn}(u;\ k)}$$

XX. 郎富變換

$$\lambda=\frac{1-k'}{1+k'} \qquad M=\frac{1}{1+k'}$$

$$L=\frac{K}{2M} \qquad L'=\frac{K'}{M}$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\,\frac{\mathrm{sn}(u;\,k)\,\mathrm{cn}(u;\,k)}{\mathrm{dn}(u;\,k)}$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1-(1+k')\,\mathrm{sn}^2(u;\,k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1-(1-k')\,\mathrm{sn}^2(u;\,k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$$

XXI. 高斯變換

$$\lambda=\frac{2\sqrt{k}}{1+k} \qquad M=\frac{1}{1+k}$$

$$L=\frac{K}{M} \qquad L'=\frac{K'}{2M}$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\,\frac{\mathrm{sn}(u;\,k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u;\,k)}$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{\mathrm{cn}(u;\,k)\,\mathrm{dn}(u;\,k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u;k)}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1-k\,\mathrm{sn}^2(u;\,k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u;\,k)}$$

$$\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=\frac{2\vartheta_1(v|\tau)\,\vartheta_0(v|\tau)}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=\frac{2\vartheta_2(v|\tau)\,\vartheta_3(v|\tau)}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=\frac{\vartheta_0^2(v|\tau)-\vartheta_1^2(v|\tau)}{\vartheta_0\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$\vartheta_0\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)=\frac{\vartheta_0^2(v|\tau)+\vartheta_1^2(v|\tau)}{\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}$$

XXII. 第一個主要的 n 級變換

$$L=\frac{K}{nM}, \quad L'=\frac{K'}{M}$$

$$c_r=\mathrm{sn}^2\left(\frac{rK}{n};\ k\right)$$

$$\lambda=k^n\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}c_{2r-1}^2 \qquad M=\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{c_{2r-1}}{c_{2r}}$$

A. n 是奇數

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\mathrm{sn}(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r}}}{1-k^2c_{2r}\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\mathrm{cn}(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}{1-k^2c_{2r}\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\mathrm{dn}(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-k^2c_{2r-1}\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{1-k^2c_{2r}\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

B. n 是偶數

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M}+L;\ \lambda\right)=\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}{1-k^2c_{2r-1}\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M}+L;\ \lambda\right)=-\frac{\lambda'}{M}\frac{\mathrm{sn}(u;\ k)}{\mathrm{cn}(u;\ k)}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r}}}{1-k^2c_{2r-1}\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M}+L;\ \lambda\right)=\frac{\lambda'}{\mathrm{dn}(u;\ k)}\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-k^2c_{2r}\mathrm{sn}^2(u;\ k)}{1-k^2c_{2r-1}\mathrm{sn}^2(u;\ k)}$$

XXIII. 第二個主要的 n 級變換

$$L=\frac{K}{M},\qquad L'=\frac{K'}{nM}$$

$$\lambda=\prod_{r=1}^{n}\frac{\Theta^2\left(\frac{2r}{n}K';\ k'\right)}{\Theta^2\left(\frac{2r-1}{n}K';k'\right)}$$

$$M=\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n}K';k'\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2r}{n}K';\ k'\right)}$$

$$c_r=\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{rK'}{n};\ k'\right)}{\operatorname{cn}^2\left(\frac{rK'}{n};\ k'\right)}\qquad \delta_r=\operatorname{dn}^2\left(\frac{rK'}{n};\ k'\right)$$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\operatorname{sn}(u;\ k)\prod_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1+\frac{\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r}}}{1+\frac{\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}$$

A. n 是奇數

$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\operatorname{cn}(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\delta_{2r}\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{1+\frac{\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\operatorname{dn}(u;\ k)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\delta_{2r-1}\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{1+\frac{\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{c_{2r-1}}}$$

B. n 是偶數

$$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\operatorname{cn}(u;k)\operatorname{dn}(u;k)\frac{\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}1-\delta_{2r}\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}1+\frac{\operatorname{sn}^2(u;k)}{c_{2r-1}}}$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M};\ \lambda\right)=\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-\delta_{2r-1}\operatorname{sn}^2(u;\ k)}{1+\frac{\operatorname{sn}^2(u;k)}{c_{2r-1}}}$$

XXIV. 若干個積分

$$\int \operatorname{sn} u \cdot du = -\frac{1}{k}\ln(\operatorname{dn} u + k\operatorname{cn} u)$$

$$\int \operatorname{cn} u \cdot du = \frac{i}{k}\ln(\operatorname{dn} u - ik\operatorname{sn} u)$$

$$\int \operatorname{dn} u \cdot du = i\ln(\operatorname{cn} u - i\operatorname{sn} u)$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln\frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'}\ln\frac{\operatorname{dn} u + k'\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{ik'}\ln\frac{\operatorname{cn} u + ik'\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}du = \frac{1}{k'}\ln\frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{cn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}du = -\frac{1}{k}\ln\frac{1 - k\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}du = \ln\frac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}du = \frac{i}{kk'}\ln\frac{ik' - k\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}du = \ln\frac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}du = \ln\frac{1 + \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u}du = \frac{1}{k'^2}\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u}du = -\frac{1}{k'^2}\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u}du = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u}du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u}du = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$$

XXV. 在實數情形中橢圓積分的計算

$\int R(x, y)\,dx$	
I	$y=\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}\quad a^2>b^2$ $k^2=\dfrac{b^2}{a^2}\qquad x=\begin{cases} b\,\mathrm{sn}\,u & (x^2<b^2)\\ \dfrac{a}{\mathrm{sn}\,u} & (x^2>a^2)\end{cases}$
II	$y=\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}\quad a^2>b^2\quad b^2<x^2<a^2$ $k^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\qquad x=a\,\mathrm{dn}\,u$
III	$y=\sqrt{(a^2-x^2)(b^2+x^2)}\quad x^2<a^2$ $k^2=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\qquad x=a\,\mathrm{cn}\,u$
IV	$y=\sqrt{(x^2-a^2)(b^2+x^2)}\quad x^2>a^2$ $k^2=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\qquad x=\dfrac{a}{\mathrm{cn}\,u}$
V	$y=\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}\quad a^2>b^2$ $k^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\qquad x=a\dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$

附錄II. 解析函數論摘要

(a)符號及定義　設 $c=a+bi$ 是複數,則

$\bar{c}$ 代表共軛複數$(a-bi)$,

$\Re c$ 代表實數部份(a),

$\Im c$ 代表虛數部份(b),

$|c|$代表模數$(\sqrt{a^2+b^2})$,

$\arg c$ 代表幅角$\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$。

複數 $c=a+bi$ 表明平面上横坐標 a、縱坐標 b 的點。上述的點通常叫做 c 點。全體滿足下邊不等式的 z 點:

$$|z-c|<\varepsilon,$$

即在圓心是 c 點、半徑是 ε 的圓內的點叫做 c 點的鄰域,更正確的說 ε-鄰域。

除去作爲複數的像的那些點(這些點有時叫做有限點)以外,再導出所謂無限遠點。它的 ε-鄰域理解爲全體的滿足於不等式

$$\left|\frac{1}{z}\right|<\varepsilon$$

的,即在某一圓外的點$\left(半徑是\ \frac{1}{\varepsilon}\right)$。這樣確定的平面,即祇具有一個無限遠點的平面叫做複數平面。

複數平面上的點集合假定滿足以下二條件,就叫做領域:(1)集合包含它自已每一個點的某一個鄰域;(2)集合包含着連結其任意二點的某一折線。

按照第一性質,領域內的每一點都是內點。若某一點不祇它本身並且它的某一鄰域都不屬於這一領域,則這一點叫做這領域的外點。若某一點,它的任一鄰域包含有領域的點,也包含領域的外點,則這一點叫做領域的境界點。

有時也考察這種的點集合,它是由領域加上它的境界點而得到的。這一點集合不是領域而是叫做閉領域。

若無限遠點是某一領域的外點,則這一領域叫做有界領域,相反的情形叫做非有界領域。換句話說,若有一正數 M 存在,使對於領域內所有的點 z 常有

$$|z|<M,$$

則這一領域叫做有界領域,相反的情形是非有界領域。

通常取平面的一部份(用一個或數個曲線作境界)爲領域。這些曲線以及沿着它們計算積分的曲線,祇要假定它們是分段平滑的就夠了。

平滑的曲線是這樣的曲線,在它的每一點均有切線,且當點描繪這一曲線時,這一

切線的方向連續地改變。各段平滑的曲線是這樣的折線，它由有限個段組成，其中每一段是平滑的曲線。

談到閉曲線(或圍線)，我們將經常假定它自己不相交。

若在領域內每一條閉曲線相當於點，卽用連續變形而不離開領域的方法，可以縮爲領域內的一點，則這一領域叫做單連通領域。

相反情形的領域叫做多連通領域。

最簡單的多連通領域是雙連通領域，在它裏邊存在有一條不與點相當的曲線，使領域內的每一個閉曲線，或者相當於點，或者相當於所述的這條曲線，卽不離開領域用連續變形的方法可以變爲所述的曲線。

(b)**解析函數** 若在複數平面上給與某一領域 G，且假定在領域內的每一點 z 對應着確定的複數 w，則 w 叫做在領域 G 內 z 的函數(單值的)，且寫成以下的形狀

$$w=f(z)。$$

若 $$z=x+iy,\quad w=u+iv,$$

則考察的事實和

$$u=\varphi(x,y),\quad v=\psi(x,y)$$

一樣。

複變函數的連續性概念恰巧和微分學內二個獨立變數的實函數的連續性概念一樣。

若對於領域 G 內的點 z，不論增量 h 如何趨於零，下邊的極限存在且有限：

$$\lim\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

則 $f(z)$ 叫做在 z 點是可微分的。上述的極限叫做 $f(z)$ 的導數，且用符號 $f'(z)$ 表示。

函數 $f(z)$ 的可微分性引起偏導數

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

的存在及等式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

這叫做柯西-黎曼方程。

若函數 $f(z)$ 在領域 G 內的每一點都可微分，則 $f(z)$ 叫做在 G 內的正則解析函數。

命 z_0 是領域 G 內的任一點，且假定 $f(z)$ 在 G 內是正則解析函數。在這樣的條件下，有冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

存在，它在用 z_0 作心而全部在 G 內的最大的圓內收斂且表明函數 $f(z)$。

相反的，具形狀(1)的冪級數，它的收斂半徑若不是零，則在收斂圓內表明正則解析函數。

取這樣的冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n。 \tag{2}$$

爲簡便起見用 $\mathfrak{P}(z|\alpha)$表示它,而用 K_α 表明它的收斂圓。在這一圓內取某一點β。根據上面指出的事實,有冪級數

$$\mathfrak{P}(z|\beta)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\beta)^n \tag{3}$$

存在,它在用點 β 作心而完全屬於 K_α 內的最大圓內表示函數 $\mathfrak{P}(z|\alpha)$ 。但也有可能,級數(3)的收斂圓超出圓 K_β 的境界。在這一情形,圓 K_α 內的級數(2)確定的函數解析開拓到 K_α 外的某一領域。

在這種情形,説:實行了直接的解析開拓。解析開拓的一般方法是依序重複任意有限數次的直接解析開拓。

由一個冪級數解析開拓所得到的全體冪級數(元素)的集合叫做解析函數。它由自己的每個元素完全確定。

應當注意,由這樣的任一個元素出發,我們在一系列的開拓以後可能得到新的元素,它的收斂圓與原來元素的收斂圓有共同的部份。同時在這一共同部份內新元素的值和原來元素的值可能不相同。換句話説,解析開拓的過程可能使單值性失去。

(c)關於積分的各種命題　曲線 C 上連續的函數 $f(z)$ 的複數線積分

$$\int_C f(z)dz$$

界説爲積分和

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)$$

的極限。若命

$$f(z)=u+iv,$$

則考察的積分能通過具以下形狀的實數線積分

$$\int_C u\,dx-v\,dy+i\int_C u\,dy+v\,dx$$

表達出來。

通過 ds 表明曲線 C 的弧微分,l 表明弧的全長,而M表明函數 $f(z)$ 在 C 上模數的最大值,則將有

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant\int_0^l |f(z)|ds\leqslant Ml。$$

假定 G 是有界領域,而 $f(z)$ 是在它裏邊的單值正則解析函數。若 G 內的閉曲線 C 相當於點,則

$$\int_C f(z)dz=0。$$

這是基本的積分定理,通常叫做柯西-辜爾薩(Goursat)定理。

若領域 G 不是單連通的,則在這裏邊的所有閉曲線並非全是等價的,故

$$\int_{C_1} f(z)dz-\int_{C_2} f(z)dz=0,$$

假定其中 C_1 和 C_2 (它們按同一方向環繞)是等價的。

在基本定理的條件下,以下的等式(柯西積分)成立:

(4) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

其中 z 是在 C 內的任一點，且當環繞 C 時這個曲線所圍成的領域保持在曲線的左邊。

同樣，假定 G 爲非單連通領域，則在以上關於曲線 C_1、C_2 所作的假定之下，對於曲線 C_1、C_2 所圍成的領域內的任意點 z，下邊的等式成立：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

且當圍繞 C_1 時領域仍然是在它的左邊。

由柯西積分(4)推得，正則的解析函數具有各級的導數，而且

(5) $$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta。$$

在(5)內取以點 z 爲中心 R 爲半徑的圓周作爲曲線 C，命 $f(z)$ 在 C 上的模數的最大值爲 M，則可求得

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant M\frac{n!}{R^n},$$

這就是所謂正則函數的導數的柯西不等式。

命圓 $$|z|\leqslant R$$

在使 $f(z)$ 是單值正則解析函數的領域內。這時，由柯西積分推得，當 $|z|<R$ 時，

(6) $$f(z)=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}u(R,\theta)d\theta,$$

其中 $v(0)$ 是 $f(z)$ 在點 0 處的虛數部份，而 $u(R,\theta)$ 是 $f(z)$ 在點 $Re^{i\theta}$ 處的實數部份。這就是所謂什瓦爾茨公式。取左邊及右邊的實數部份，且命

$$z=re^{i\varphi}\quad(r<R),$$

則導出波阿桑(Poisson)公式

(7) $$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(R,\theta)d\theta。$$

由柯西-黎曼方程及正則解析函數的各級導數的存在得到：正則解析函數的實數部份(以及虛數部份)滿足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=0,$$

也就是調和函數。相反地，對於任何的調和函數 u，可求出所謂共軛的調和函數

$$v=\int\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

它具有這樣的性質，即使量

$$w=u+iv$$

是正則的解析函數。

取任意的各段連續且具有週期 2π 的函數 $F(\theta)$，且在公式(6)及(7)中用 $F(\theta)$ 代替 $u(R,\theta)$，我們將得出兩個邊界問題的解。即公式(6)給與正則的解析函數在圓內的表示式，但其實數部份在圓周上取已知的數值，而公式(7)給與調和函數在圓內

的表示式，在圓周上則取已知的數值。這樣，我們這兒有吉里赫萊問題當領域爲圓時的解。注意，"函數在圓周上取已知的數值" 這句話應當了解爲這種意義：當點沿圓的半徑趨近於圓周時，函數趨於極限，這一極限值等於函數在圓周上給與的值，且祇假定函數在考察的點上是連續就夠了。

(d)解析函數的冪級數展開　上邊已經提過，在某一領域 G 內單值正則的解析函數 $f(z)$ 可展成以下形狀的級數

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k,$$

這一級數在以點 z_0 爲心的某一圓內代表函數 $f(z)$。這是函數 $f(z)$ 的戴勞氏級數，即係數 c_k 用以下公式確定

$$c_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}。$$

設 $f(z)$ 在圓環

$$r<|z-a|<R$$

內是單值的正則解析函數，則在這一圓環內，$f(z)$ 可展成以下形狀的冪級數

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k,$$

它不祇包含 $z-\alpha$ 正的乘冪，且包含 $z-\alpha$ 負的乘冪。寫出的級數叫做勞耶(Laurent)級數。它的係數可用以下的公式求出來：

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{k+1}}dz,$$

其中積分所沿的曲線 L 是圓周

$$|z-a|=q,$$

(而 q 爲任意數，但應滿足不等式 $r<q<R$)或者是任意的在圓環內而與上邊所提到的圓周等價的曲線。

特別的，假定單值函數 $f(z)$ 在圓

$$|z-\alpha|<R$$

內去掉它的圓心 α 後是正則的解析函數，則 $f(z)$ 在這一"穿孔"的圓內可展成勞耶級數。這個圓心是函數 $f(z)$ 的孤立奇異點。全體 $z-\alpha$ 的負數乘冪的項叫做 $f(z)$ 在考察的奇異點處的主要部份。若這主要部份包含無窮多項，則奇異點叫做本性奇異點。若主要部份祇包含有限的項，即當 $k<-n$ 時全體的 a_k 都等於零，則奇異點叫做非本性奇異點或叫做極點。當 $k<-n$ 時 $a_k=0$ 且 $a_{-n}\neq 0 (n>0)$ 則這個 α 叫做 n 級極點。

衞爾斯脫拉斯在 1876 年曾證明了一個非常重要的關於單值解析函數在其本性奇異點的鄰域的狀態的定理，假定這一本性奇異點關於函數另外的本性奇異點是孤立的，就是或者是孤立的本性奇異點，或者是極點的極限點。在這樣點的任一鄰域，函數 $f(z)$ 所取的值可以和預先給與的任意數任意地接近。

函數在極點鄰域的情況就不同了：當趨近於極點時，函數的模無限增大。

最後，還有一可能性。函數 $f(z)$ 在孤立奇異點的鄰域是有界的。在這一情形，奇

異點是可以除去的，卽適當的定義函數在所考察的點的值後，這個點可以變爲不是奇異點。

（e）**共形寫像** 假定在 z 平面上的某一領域 G 內，給與單值連續函數

$$w=f(z)。\tag{8}$$

約定用第二平面（w 平面）上的點來表示複數 w，我們可以用函數（8）對於領域 G 內的每一點連繫 w 平面上的某一點。換句話說，由函數（8）將 z 平面上的領域 G 寫像在 w 平面上某一個點集合。

特別重要的是那些正則解析函數 $f(z)$ 所作的寫像。

設 $f(z)$ 是正則解析函數，且設在領域 G 內的某一點 z_0 處 $f(z)$ 的導數不等於零，則點 z_0 的充分小的鄰域互相單值地且連續地寫像在 w 平面上的某一領域，它包含點 $w_0=f(z_0)$。同時通過點 z_0 的兩曲線間的夾角，寫像到 w 平面上的角大小方向相同，且在點 z_0 寫像的線性比例尺對於通過 z_0 的各曲線是相同的。所以上述的寫像叫做共形寫像（無限小部份相似）。

今將表述共形寫像理論的基本定理。

定理 1.（黎曼，喀喇機阿島雷 carathéodory）。z 平面上的每一個單連通領域 G，具有多於一個的境界點（這是意味着除去全平面以及穿孔的平面），能夠有無窮多方法互相單值地及共形地寫像到 w 平面上的單位圓內：

$$|w|<1。\tag{9}$$

如果使領域 G 的已知點 z_0 與某一個線素，卽在這個點上的某一個方向變爲圓（9）內具有已知線素的已知點，則將領域 G 寫像爲單位圓的寫像只有一個。

定理 2. 若單連通領域的境界是沒有重點的連續曲線，則當將領域共形寫像爲圓的時候，對應是互相單值的與連續的一直到境界。

這時，要唯一地確定寫像函數，只須使領域境界上三個隨意選擇的點各變爲圓周上的也是隨意選擇的，但按環繞曲線的順序排列的三個點。

下列對稱原理對構造共形寫像的函數常有很大的用處。

對稱原理 命領域 G_z 的境界有直線段或圓弧 α，而領域 G_w 的境界有直線段或圓弧 β，而且當

$$w=f(z)$$

將領域 G_z 寫像爲 G_w 時境界段 α 變爲 β。

這時，可將函數 $f(z)$ 解析開拓過弧 α。要得到這個開拓必須把與點 w 關於 β 對稱的點 w^* 取爲函數 w 在與點 z 關於 α 對稱的點 z^* 上的值。

什麼樣的點叫做對於直線段對稱的點，無需說明。如果我們取圓弧以代替直線段，那麼當兩個點在由圓心所射出的同一條射線上，且這兩點與圓心距離的乘積等於圓的半徑的平方時，則說這兩個點是對稱的。

如果談的是把圓寫像爲圓或半平面，那麼用對稱原理能很快地造出寫像函數來。這兒必須注意，在這種情形之下，分式線形函數

$$w=\frac{az+b}{cz+d}。$$

是寫像函數。

例如，把圓 $|z|<R$

寫像爲單位圓 $|w|<1$，

同時使點 $z_0(|z_0|<R)$ 變爲點 $w=0$ 的函數應當有以下的形狀

$$w=e^{i\delta}\frac{R(z-z_0)}{R^2-\bar{z}_0 z},$$

其中 δ 是任意的實數。

事實上，因爲圓周 $|z|=R$ 變到圓周 $|w|=1$，且點 z_0 變到 $w=0$，故 z_0 的對稱點 $\frac{R^2}{\bar{z}_0}$ 必須變到 w 平面上的無限遠點。這就意味着

$$w=C'\frac{z-z_0}{z-\frac{R^2}{\bar{z}_0}}=C\frac{R(z-z_0)}{R^2-\bar{z}_0 z},$$

其中 C'、C 是常數。但點 $z=R$ 變到單位圓周上的點。故數

$$C\frac{R-z_0}{R-\bar{z}_0}$$

的模數必須等於 1，由此得

$$C=e^{i\delta},$$

其中 δ 是實常數。

變換 $\zeta=\frac{1}{z}$

叫做反演。爲了得出點 ζ，應當把 z 變到 z^*，z^* 關於圓周

$$|z|=1$$

和 z 對稱，然後把 z^* 變到關於實數軸爲對稱的點。一平面上零點反形後對應於另一平面上的無限遠點。

若想研究任意函數

$$w=f(z)$$

在無限遠點鄰域的情況，則可命

$$z=\frac{1}{\zeta},$$

而研究函數 $w=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi(\zeta)$

在零點的鄰域的情況。

現在再來談一談將 z 平面上有界的多角形領域 G 寫像爲圓 $|w|<1$ 的共形寫像的問題。命領域 G 是用

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$$

作頂點的 n 角形，且用

$$\pi\alpha_1,\ \pi\alpha_2,\ \cdots,\ \pi\alpha_n$$

作內角。

其次，假定這些頂點的像是點(預先是不知的)

$$w_1, w_2, \cdots, w_n,$$

在這樣的情形下，寫像的函數具有以下的形狀

$$z=C\int(w-w_1)^{\alpha_1-1}(w-w_2)^{\alpha_2-1}\cdots(w-w_n)^{\alpha_n-1}dw+C',$$

其中 C、C' 是某二個常數。右邊的積分叫做什瓦爾次-克雷斯陶菲爾積分。

右邊包含 $2n+4$ 個實參數，即每個 C 及 C' 包含兩個參數，然後 n 個角 α_i，最後圓周上的點 w_k 可用 n 個實參數確定。在量 α_i 之間具有以下的關係

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=n-2, \tag{10}$$

它表明多角形內角的和等於多角形的邊數減去二再乘以 π。

除了方程(10)外，我們將得出 $2n$ 個方程

$$z_k=z(w_k) \qquad (k=1,2,\cdots,n),$$

這是因爲複量間的每一個等式可分成實量間的兩個等式。

我們共總有 $2n+1$ 個方程，但存在着 $2n+4$ 個待定參數。這樣，遺留下三個參數可以任意。這與下列事實完全一致，寫像當給出在圍成領域的曲線上的三個點的像時，就完全確定。

注意，將多角形 G 寫像爲上半平面 w 的函數有相同的形式。唯一的差別只是，多角形頂點 w_k 的像現在是實軸上的點(在有限距離內)。

(f)整函數及有理型函數 在除去無限遠點的平面(穿孔的平面)上是正則的單值解析函數，叫做整函數。

若我們取一冪級數使在任一點的鄰域表示整函數，則這一級數在它的整個存在領域內仍然表示我們的整函數。換句話說，在考察的情形中，一組冪級數(按定義，它是解析函數)可由其中的一個元素組成。

命給與的整函數是

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n。$$

作變換 $z=\frac{1}{\zeta}$，我們將得到以下的結論：這一級數可以認爲是對於無限遠點鄰域的勞耶級數。無限遠點或者是極點或者是本性奇異點。

若從某一個 a_n 開始，以後的所有 a_n 全是零，則我們將得出極點的情形。在這一情形，$f(z)$ 是有理整函數或多項式。

若 $f(z)$ 的展開式包含無窮多項，則 $f(z)$ 叫做超越整函數。

若整函數不是常數，則在穿孔的平面內不能是有界的。這一定理叫做留衞路定理，可以很容易由柯西關於導數的不等式證明它。

由初等代數知道，任何的有理整函數

$$f(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+\cdots+p_n$$

可以用以下的形狀表示出來：

$$f(z)=p_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),$$

其中 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是它的零點。

超越整函數也可以類似地展爲乘積。這裏我們將導出衛爾斯脫拉斯定理。

命 $f(z)$ 是超越整函數。假定它的零點有無窮多個，則在有限的距離內沒有極限點，因爲零點的極限點是函數的奇異點。所以函數 $f(z)$ 異於 $z=0$ 的零點

$$c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots,$$

可以依照模數增大的順序排列爲

$$|c_1| \leqslant |c_2| \leqslant \cdots \leqslant |c_n| \leqslant \cdots$$

在這樣的情形下有如下的多項式的敘列

$$p_1(z), \quad p_2(z), \quad \cdots, \quad p_n(z), \quad \cdots$$

存在，使

$$f(z) = z^m e^{H(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c_k}\right) e^{p_k(z)},$$

其中整數 $m \geqslant 0$，而 $H(z)$ 是整函數。若預先去掉有界領域 G 內使因子(它們有限個)變爲零的點，則這一無窮乘積在這樣的領域內均一收斂。寫出的展開式顯然指明函數 $f(z)$ 的零點是什麼。因子

$$e^{H(z)}, \quad e^{p_k(z)}$$

表明沒有零點的整函數，因子

$$e^{p_k(z)}$$

的作用是保障無窮乘積的收斂。

一個最簡單的例是函數

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}},$$

其中 C 是尤拉常數。

其次的例是函數

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

在乘積符號上的撇表明 $n=0$ 的因子應當不要。

今來談有理型函數。這是在有限距離內的奇異點祇有極點的單值解析函數。

最簡單的有理型函數是有理分式。如同在代數學內已經知道的，每一個有理分式一方面可用兩個多項式的比表示出來，另一方面可以寫成部份分式及整式部份之和。同樣的表示法可以用到任意的有理型函數。

第一，每一個有理型函數是兩個整函數的比。

第二，有理型函數可以展成簡單函數的特種級數。這些展開式由米塔克-里弗萊爾(Mittag-Leffler)定理建立起來。定理如下：

命 $F(z)$ 是有理型函數且命 $c_1, c_2, \cdots$ 是它的極點(彼此全不相同)，依照模數增大的順序排列起來：

$$|c_1| \leqslant |c_2| \leqslant \cdots \leqslant |c_n| \leqslant \cdots;$$

其次，命

$$h_n(z) = \frac{A_n}{(z-c_n)^{k_n}} + \frac{B_n}{(z-c_n)^{k_n-1}} + \cdots + \frac{L_n}{z-c_n}$$

是函數 $F(z)$ 對於極點 c_n 的主要部份。

在這樣的情形下,有

$$F(z)=f(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{h_n(z)-p_n(z)\},$$

其中 $f(z)$ 是整函數,而 $p_n(z)$ 是多項式。若去掉有界領域內使其中的項(項有有限個)為極點的點,則這一級數在這樣的每一有界領域內是均一收斂。在有限距離內沒有奇異點的多項式 $p_n(z)$ 的作用是保證級數的收斂性。

米塔克-里弗萊爾定理的最簡單的例是以下的展開式

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}。$$

(g)留數定理　命 $f(z)$ 是在某一領域 G 內祇具有孤立奇異點的單值解析函數。若 a 是這些奇異點中的一個,且 L 是閉曲線,在 L 內祇有 a 點而不包含 $f(z)$ 的另外的奇異點,則量

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz$$

(其中沿 L 的積分取正方向),叫做函數 $f(z)$ 在 a 點的留數。

用符號

$$\operatorname*{Rés}_{z=a} f(z)$$

以表示留數。

若在境界 L 內 $f(z)$ 具有奇異點 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,則

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Rés}_{z=a_k} f(z)\ 。$$

這樣,積分

$$\int_L f(z)dz$$

的計算歸結到求函數 $f(z)$ 的留數。

函數在 a 點的留數等於函數按 $z-a$ 的乘冪的勞那級數展開式中

$$\frac{1}{z-a}$$

的係數。

引導出函數在無限遠點的留數是有益的。它等於函數在無限遠點的勞那級數中

$$\frac{1}{z}$$

的係數變號。

今假定 $f(z)$ 是有理型函數。在這樣的情形中,對於任意有限距離內的點 z_0,下邊的展開式成立:

$$f(z)=(z-z_0)^k\{A_0+A_1(z-z_0)+A_2(z-z_0)^2+\cdots\}, \tag{11}$$

其中 k 是整數(正數、負數或零),但係數 A_0 則異於零。

若 k 是正數、則 z_0 點是函數 $f(z)$ 的零點並且是 k 級的零點。

若 $k=-l$ 是負數,則點 z_0 是 l 級的極點。

等式(11)可以取對數,然數再求導數。這樣的方法得出展開式

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k}{z-z_0}+B_0+B_1(z-z_0)+B_2(z-z_0)^2+\cdots$$

我們看出,函數

$$\frac{f'(z)}{f(z)},$$

即有理型函數的對數的導數仍然是有理型函數且祇具有一級的極點。對數的導數的極點是:

(1)原來的函數的零點及(2)原來的函數的極點。

同時對數的導數的留數等於零點的級(在第一種情形中)及極點的級的負值(在第二種情形中)。

若有理型函數 $f(z)$ 在境界 L 上沒有極點且不爲零,但在 L 內具有零點

$$b_1, b_2, \cdots, b_n,$$

它們的級分別是

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n;$$

且具有極點　$a_1, a_2, \cdots, a_m,$

它們的級分別是

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m,$$

則

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{s=1}^{n}\beta_s-\sum_{r=1}^{m}\alpha_r。$$

計算 k 級的零點(以及極點)時,爲方便計,算作 k 個點。這樣計算常常叫做標準計算。這樣,

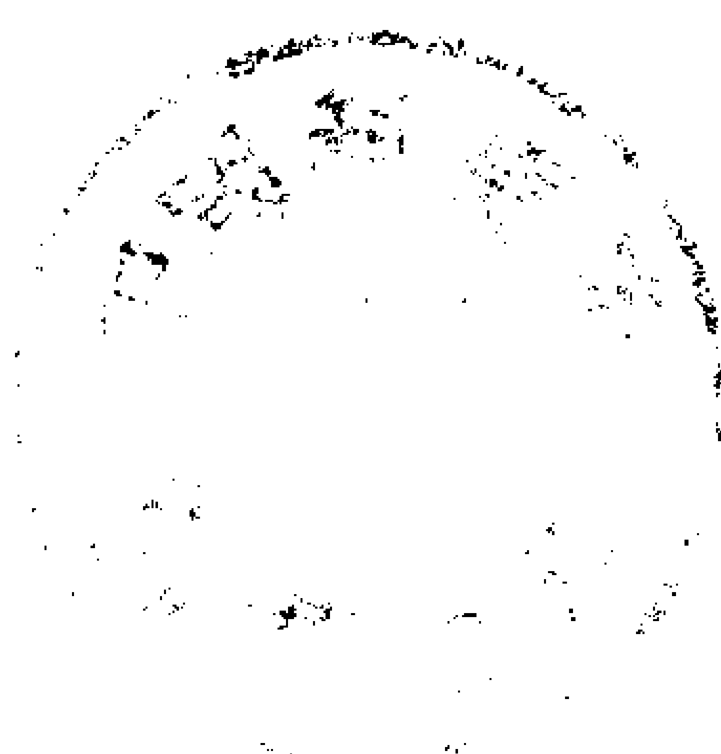
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

等於函數 $f(z)$ 在 L 內,按標準計算的零點的數目和按標準計算的極點的數目的差。

由以上敍述容易看出,它等於量

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)-c}dz,$$

假定,函數 $f(z)$ 在境界 L 上沒有極點且不取值 c。



[General Information]
书名=椭圆函数论纲要
作者=
页数=253
SS号=0
出版日期=